# Beitrag zur Berechnung von zylindrischen mit Schrumpfringen versehenen Rohren.

**Von der Technischen Hochschule zu Breslau**
**zur**
**Erlangung der Würde eines Doktor-Ingenieurs**
**genehmigte**

## Dissertation

vorgelegt von
Dipl.-Ing. **Paul Grüner**
aus Troppau

---

Berichter: Professor Richard Krauß
Mitberichter: Professor Dr.-Ing. Ludwig Mann

---

Tag der Promotion: 18. Juni 1937

— 1938 —

# Beitrag zur Berechnung von zylindrischen, mit Schrumpfringen versehenen Rohren.

---

Von der Technischen Hochschule zu Breslau
zur
Erlangung der Würde eines Doktor-Ingenieurs
genehmigte
Dissertation

vorgelegt von

Dipl.-Ing. Paul Grüner
aus Troppau

---

Berichter: Professor Richard Krauß
Mitberichter: Professor Dr.-Ing. Ludwig Mann

Tag der Promotion: 18.Juni 1937

- 1938 -

Vervielfältigung:
Vervielfältigungsanstalt E. Hunold
Braunschweig Stobenstraße 25

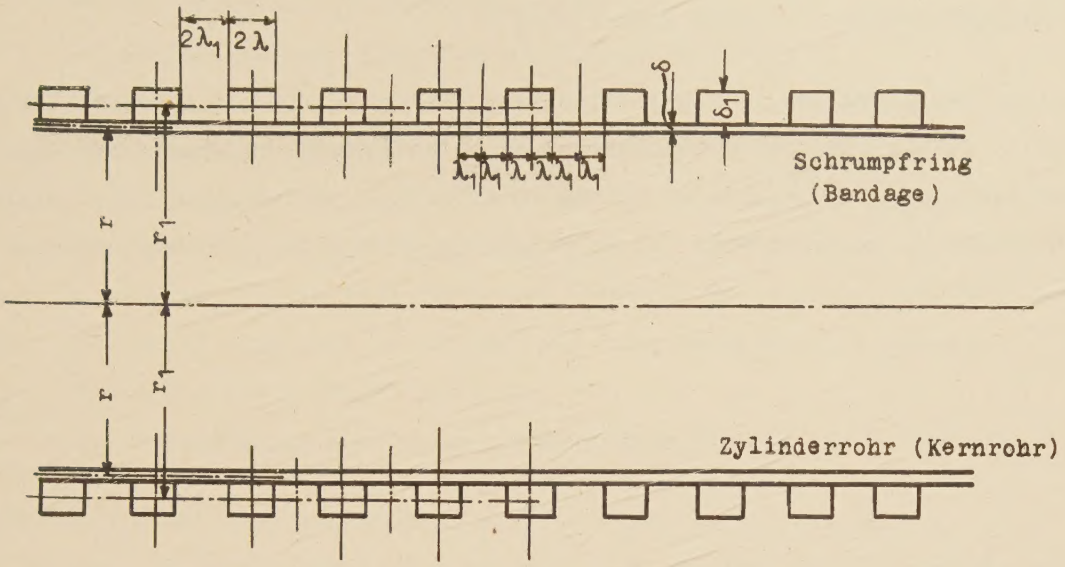
* 41438

R. UNIV.
BIBLIOTHEEK
LEIDEN

# V o r w o r t .

Zur Festlegung der in nachfolgender Arbeit angewandten Bezeichnungen ist in Abb.1 ein mittlerer Abschnitt eines zylindrischen Rohres mit Schrumpfringen im Schnitt dargestellt.

Abb.1.




Aufgeschrumpften Ringen pflegte man bisher im allgemeinen eine senkrecht zur Rohrwandung gerichtete Krafteinwirkung zuzuschreiben. Zutreffend ist dies jedoch nur bei einem linearen Ring ohne Seitenausdehnung. Ein Ring, der selbst als zylindrisches Rohrstück aufzufassen ist, kommt jedoch ohne Mitwirkung von Scherkräften zwischen Rohr und Ring trotz der Schrumpfung nicht zum satten Anliegen in der ganzen Breitenausdehnung. Es wird nachgewiesen, daß ein solches Anliegen bei fehlenden Scherkräften erst durch ein Moment und eine Querkraft an den freien Außenrändern des Ringes erzwungen werden kann.

Die folgende Berechnung gliedert sich somit in 2 Teile. Nach Bestimmung der Außenrandbelastung werden Formänderung und Spannung bei gemeinsamer Biegung von Schrumpfring und Rohr ermittelt. Sodann werden die Schubkräfte bestimmt, die einer Außenrandbelastung allein entsprechen würden. Der zugehörige Spannungs- und Formänderungszustand wird dem vorher ermittelten so überlagert, daß die eingeführten Randkräfte verschwinden, wie es dem wirklichen Zustand entspricht. Die nachfolgenden Abbildungen 2 und 3 erläutern das eingeschlagene Verfahren.

Abb.2.

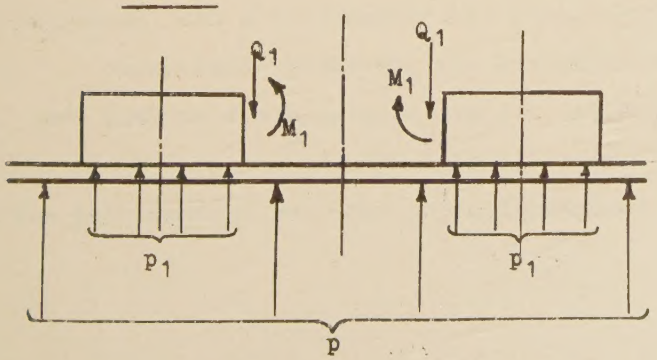
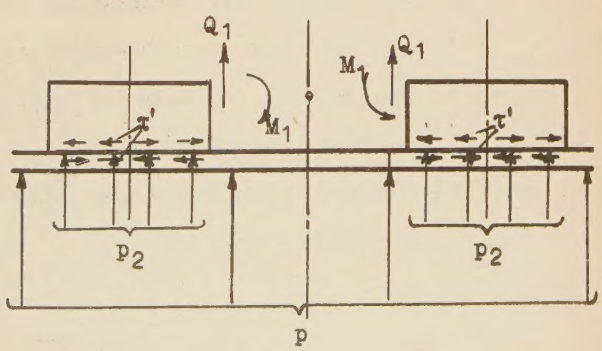


Abb.3.



Dem ersten Teil der Untersuchung liegt also eine Belastung durch den Innendruck p und die durch die Schrumpfung a hervorgerufene Belastung $p_1$ zu Grunde, unter der gleichzeitigen Annahme, daß die Ordinaten $y_1$ und y der Biegungslinien von Schrumpfring und Rohr, dem satten Anliegen entsprechend, sich um das Schrumpfmaß a unterscheiden, wobei die Außenrandkräfte $M_1$ und $Q_1$, wie später nachgewiesen wird, notwendig sind. Dabei entstehen Drücke $p_1$ zwischen Schrumpfring und Rohr (Abb.2).

Im zweiten Teil wird die Spannungsverteilung als Folge einer Außenrandbelastung allein ermittelt, um dieselbe dem Spannungszustand 1 überlagern zu können und damit die tatsächliche Bedingung des lastfreien Randes zu erfüllen. Der Zustand 2 ist charakterisiert durch Drücke $p_2$ zwischen Rohr und Schrumpfring, sowie die dort auftretenden Scherspannungen $\tau'$ (Abb.3).

- - - - - - - -

## G l i e d e r u n g .

1.) Festlegung der Bezeichnungen für die in der Berechnung auftretenden Größen am Zylinderrohr und den Schrumpfringen.

Teil I.

2.) Untersuchung der Bedingungen, unter denen zwischen Rohr und Schrumpfring keine Schubspannungen (Reibung) auftreten.

a) Aufstellung der Gleichungen.

α) an dem Schrumpfring

β) am Zylinderrohr

b) Elimination des zwischen Schrumpfring und Zylinderrohr auftretenden Normaldruckes $p_1$.

c) Einführung einer neuen dimensionslosen Variablen ($u = \frac{x}{\lambda}$) in die Gleichungen.

d) Die allgemeine Lösung der Gleichungen und ihre Ableitungen.

e) Bestimmung der Konstanten in Abhängigkeit von Schrumpfmaß a und Innendruck p.

f) Zahlenmäßige Durchrechnung eines Beispiels mit gegebenen Abmessungen.

g) Bestimmung der Momente und Querkräfte, die pro Längeneinheit am Rand des Schrumpfringes auftreten.

h) Beantwortung der Frage nach den zwischen Zylinderrohr und Schrumpfring auftretenden Kräften.

Teil II.

3.) Untersuchung des Spannungszustandes bei Belastung des Schrumpfringrandes durch das Biegungsmoment $M_b = M_{(1)}$ und die Querkraft $Q_b = Q_{(1)}$, der durch Überlagerung mit dem vorhergehenden Belastungsfall die reine Beanspruchung durch Schrumpfung und Innendruck (bei kräftefreiem Schrumpfringrand) ergibt.

a) Das Auftreten von Schubspannungen und Ansatz der Gleichung für das rechnungsmäßige Erfassen derselben in allgemeiner Form.

b) Gleichgewichtsbetrachtung und Ableitung der Gleichungen

α) am Schrumpfring

β) am Zylinderrohr.

c) Elimination des Zwischendruckes $p_2$.

d) Ansatz für die Bestimmung des partikulären Integrals.

e) Lösung desselben in allgemeiner Form durch eine Potenzreihe.

f) Lösung des totalen Integrals.

g) Zurückführung der Integrations-Konstanten auf die Beiwerte $\tau_0$, $\tau_2$, $\tau_4$ und $\tau_6$.

4.) Die statischen Bedingungen für die Werte $\tau_0$, $\tau_2$, $\tau_4$ und $\tau_6$.

a) Ihre Vereinbarkeit mit den $Q_b$ und $M_b$ am Rand des Schrumpfringes und Aufstellung der beiden Bedingungs-Gleichungen hierfür.

b) Herleitung der weiteren Bestimmungsgleichungen für die Größen $\tau_0$, $\tau_2$, $\tau_4$ und $\tau_6$ aus dem Castigliano'schen Prinzip.

5.) Ausdruck für die Formänderungsarbeit A für einen Ringsektor von der Breite 1.

α) Zerlegung in vier Bestandteile $A_1$, $A_2$, $A_3$, $A_4$.

β) Berechnung der Integrale durch Simpsonierung und Durchrechnung eines Beispiels mit gegebenen Zahlenwerten.

6.) Bestimmung der Größen $\tau_0$, $\tau_2$, $\tau_4$ und $\tau_6$.

7.) Aufstellung der Biegungslinie für den Spannungszustand II.

8.) Zusammensetzung der Biegungslinien.

9.) Spannungsdiagramme und Schlußbetrachtung.

- - - - - - -

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41549814_0059

Abb.4

Bezeichnungen:

Der mittlere Radius des Zylinderrohres ... $r$

Die Wandstärke des Zylinderrohres ..... $\delta$

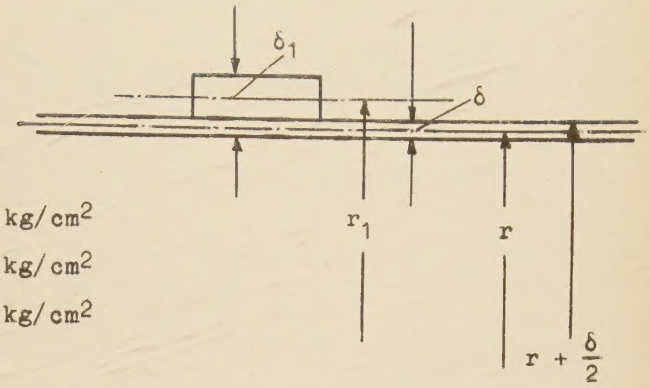
Der mittlere Radius des Schrumpfringes ... $r_1$

Die Wandstärke des Schrumpfringes ..... $\delta_1$

Normaldruck zwischen Schrumpfring und Zylinderrohr ..... $p_1$ kg/cm²

bzw. $p_2$ kg/cm²

Innendruck im Zylinderrohr ..... $p$ kg/cm²




I. Untersuchung der Bedingungen,

unter denen zwischen Rohr und Schrumpfring bei gemeinsamer Biegung keine Schubspannungen (Reibung) auftreten.

Hierfür gelten die Gleichungen:

1.) am Schrumpfring:

$$\frac{d^4y_1}{dx^4} + \frac{12\,y_1}{r_1^2\delta_1^2} = \frac{12\,(r_1 - \frac{\delta_1}{2})}{E \cdot \delta_1^3 \cdot r_1} \cdot p_1$$

2.) am Zylinderrohr gelten 2 verschiedene Gleichungen:

a) unter dem Schrumpfring:

$$\frac{d^4y}{dx^4} + \frac{12\,y}{r^2\,\delta^2} = -\frac{12\,(r + \frac{\delta}{2})}{E \cdot \delta^3 \cdot r} \cdot p_1 + \frac{12\,(r - \frac{\delta}{2})}{E \cdot \delta^3 \cdot r} \cdot p$$

b) außerhalb des Schrumpfringes:

$$\frac{d^4y}{dx^4} + \frac{12\,y}{r^2\,\delta^2} = \frac{12\,(r - \frac{\delta}{2})}{E \cdot \delta^3 \cdot r} \cdot p$$

3.) Bezeichnet a das Schrumpfmaß, so gilt im Bereiche des Schrumpfringes

$$y_1 = a + y$$

Die Aufgabe besteht zunächst darin, festzustellen, unter welchen Bedingungen die Gleichungen 1 bis 3, die unter Zugrundelegung lediglich normaler Drücke zwischen Schrumpfring und Rohr aufgestellt sind, miteinander verträglich sind. Entfernt man aus den Gleichungen 1 und 2a $p_1$ und benutzt gleichzeitig Gleichung 3, dann entsteht mit der Beziehung

$$r_1 - \frac{\delta_1}{2} = r + \frac{\delta}{2} \quad \text{die Gleichung:}$$

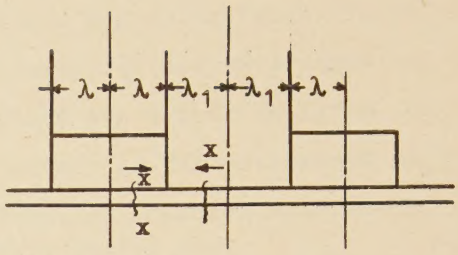
4.) $$\frac{d^4y}{dx^4} \cdot \frac{E}{12\,(r + \frac{\delta}{2})} \cdot (r_1\,\delta_1^3 + r \cdot \delta^3) + \frac{E}{r + \frac{\delta}{2}} \cdot (\frac{\delta_1}{r_1} + \frac{\delta}{r}) \cdot y =$$

$$= -\frac{E}{r + \frac{\delta}{2}} \cdot \frac{\delta_1}{r_1} \cdot a + p \cdot \frac{r - \frac{\delta}{2}}{r + \frac{\delta}{2}}$$

An Stelle von x werde für die Folge die dimensionslose Veränderliche $u = \frac{x}{\lambda}$ eingeführt,

wobei $2\lambda$ die Breite des Schrumpfringes bedeutet, womit die letzte Gleichung die Form erhält:

Abb.5




5.) $$\frac{1}{4k^4}\cdot\frac{d^4y}{du^4}+y=-a\cdot\frac{\frac{\delta_1}{r_1}}{\frac{\delta_1}{r_1}+\frac{\delta}{r}}+\frac{p}{E}\cdot\frac{r-\frac{\delta}{2}}{\frac{\delta_1}{r_1}+\frac{\delta}{r}},$$

wobei zur Abkürzung gesetzt ist:

$$k=\lambda\cdot\sqrt[4]{\frac{12\cdot\left(\frac{\delta_1}{r_1}+\frac{\delta}{r}\right)}{\delta_1^3\cdot r_1+\delta^3\cdot r}}$$

Die allgemeine Lösung der Differentialgleichung ist im Bereich der Breite des Schrumpfringes:

6.) $$y=\cos ku\cdot(C_1\,\mathrm{Kos}\,ku+C_2\,\mathrm{Sin}\,ku)+\sin ku\cdot(C_3\cdot\mathrm{Kos}\,ku+C_4\cdot\mathrm{Sin}\,ku)-$$

$$-a\cdot\frac{\frac{\delta_1}{r_1}}{\frac{\delta_1}{r_1}+\frac{\delta}{r}}+\frac{p}{E}\cdot\frac{r-\frac{\delta}{2}}{\frac{\delta_1}{r_1}+\frac{\delta}{r}}$$

Für die Lösung außerhalb des Schrumpfringes werde analog: $x=\lambda_1\cdot u$ gesetzt.
Die Gl. 2.b) nimmt dann die Form an:

7.) $$\frac{1}{4k_1^4}\cdot\frac{d^4y}{du^4}+y=\frac{p}{E}\cdot\frac{r-\frac{\delta}{2}}{\frac{\delta}{r}}\qquad\text{wobei}\quad k_1=\lambda_1\cdot\sqrt[4]{\frac{12}{r^2\delta^2}}$$

Die Lösung lautet:

8.) $$y=\cos k_1u\cdot(D_1\cdot\mathrm{Kos}\,k_1u+D_2\cdot\mathrm{Sin}\,k_1u)+\sin k_1u\cdot(D_3\cdot\mathrm{Kos}\,K_1u+D_4\cdot\mathrm{Sin}\,k_1u)+\frac{p}{E}\cdot\frac{r-\frac{\delta}{2}}{\frac{\delta}{r}}$$

In vorstehenden Gleichungen müssen in genügender Entfernung von den Rohrenden aus Symmetriegründen die Konstanten $C_2$, $C_3$ und $D_2$, $D_3$ verschwinden und die Gleichungen nehmen jetzt die Form an:

9.) $$y=C_1\cdot\cos ku\cdot\mathrm{Kos}\,ku+C_4\cdot\sin ku\cdot\mathrm{Sin}\,ku-a\cdot\frac{\frac{\delta_1}{r_1}}{\frac{\delta_1}{r_1}+\frac{\delta}{r}}+\frac{p}{E}\cdot\frac{r-\frac{\delta}{2}}{\frac{\delta_1}{r_1}+\frac{\delta}{r}}$$

10.) und: $$y=D_1\cdot\cos k_1u\cdot\mathrm{Kos}\,k_1u+D_4\cdot\sin k_1u\cdot\mathrm{Sin}\,k_1u+\frac{p}{E}\cdot\frac{r-\frac{\delta}{2}}{\frac{\delta}{r}}$$

Für die spätere Anwendung seien die Ableitungen der vorstehenden Gleichungen angeschrieben:

1.) Im Bereich des Schrumpfringes:

$$\frac{dy}{du}=k\cdot C_1(-\sin ku\cdot\mathrm{Kos}\,ku+\cos ku\cdot\mathrm{Sin}\,ku)+k\cdot C_4\cdot(\cos ku\cdot\mathrm{Sin}\,ku+\sin ku\cdot\mathrm{Kos}\,ku)$$

$$\frac{d^2y}{du^2}=2k^2\cdot(-C_1\cdot\sin ku\cdot\mathrm{Sin}\,ku+C_4\cdot\cos ku\cdot\mathrm{Kos}\,ku)$$

$$\frac{d^3y}{du^3} = 2\,k^3 \cdot [-C_1 \cdot (\cos ku \cdot \mathrm{Sin}\, ku + \sin ku \cdot \mathrm{Kos}\, ku) + C_4 \cdot (-\sin ku \cdot \mathrm{Kos}\, ku + \cos ku \cdot \mathrm{Sin}\, ku)]$$

2.) für das freie Rohr:

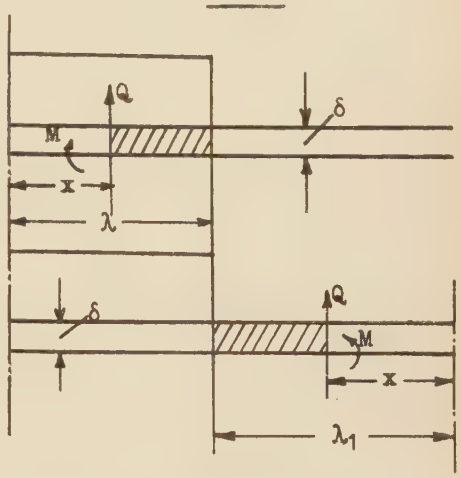
$$\frac{dy}{du} = k_1 \cdot [D_1 \cdot (-\sin k_1u \cdot \mathrm{Kos}\, k_1u + \cos k_1u \cdot \mathrm{Sin}\, k_1u) + D_4 \cdot (\cos k_1u \cdot \mathrm{Sin}\, k_1u + \sin k_1u \cdot \mathrm{Kos}\, k_1u)]$$

$$\frac{d^2y}{du^2} = 2\,k_1^2 \cdot (-D_1 \cdot \sin k_1u \cdot \mathrm{Sin}\, k_1u + D_4 \cdot \cos k_1u \cdot \mathrm{Kos}\, k_1u)$$

$$\frac{d^3y}{du^3} = 2\,k_1^3 \cdot [-D_1 \cdot (\cos k_1u \cdot \mathrm{Sin}\, k_1u + \sin k_1u \cdot \mathrm{Kos}\, k_1u) + D_4 (-\sin k_1u \cdot \mathrm{Kos}\, k_1u + \cos k_1u \cdot \mathrm{Sin}\, k_1u)]$$

Die Momente und Querkräfte am Zylinderrohr, bezogen auf die Längeneinheit des mittleren Umfangs, lassen sich wie folgt erfassen:

Abb.6




11.) $M = \frac{E\,\delta^3}{12\,\lambda^2} \cdot \frac{d^2y}{du^2}$ 12.) $Q = \frac{E\,\delta^3}{12\,\lambda^3} \cdot \frac{d^3y}{du^3}$

beziehungsweise:

13.) $M = \frac{E\,\delta^3}{12\,\lambda_1^2} \cdot \frac{d^2y}{du^2}$ 14.) $Q = \frac{E\,\delta^3}{12\,\lambda_1^3} \cdot \frac{d^3y}{du^3}$

Bestimmung von $C_1$, $C_4$, $D_1$ und $D_4$.

Hiermit können wir Momente und Querkräfte in doppelter Weise an der Übergangsstelle, das heißt für $x = \lambda$ unter dem Ring und für $x = \lambda_1$ am freien Rohr ausdrücken und erhalten somit 4 Gleichungen zur Bestimmung von $C_1$, $C_4$, $D_1$, $D_4$. Denn es stimmen für $u = 1$ $y$ und $\frac{d^2y}{dx^2}$ am bandagierten Rohrteil, sowie $\frac{dy}{dx}$ und $\frac{d^3y}{dx^3}$ nach Umkehrung des Vorzeichens mit den entsprechenden Werten des freien Rohrteils überein.

A) Diese vier Gleichungen werden nachstehend aufgestellt und nach der Gauß'schen Eliminationsmethode aufgelöst und ergeben so die Konstanten: $C_1$, $C_4$, $D_1$ und $D_4$ als Funktion von U, wobei

15.) $$U = -a \cdot \frac{1}{1 + \frac{\delta}{\delta_1} \cdot \frac{r_1}{r}} + p \cdot \frac{r}{E} \cdot \left(\frac{r}{\delta} - \frac{1}{2}\right) \cdot \frac{1}{1 + \frac{\delta}{\delta_1} \cdot \frac{r_1}{r}}$$

Zur Abkürzung setze man:

$\cos k \cdot \mathrm{Kos}\, k = \alpha_1$ $\cos k_1 \cdot \mathrm{Kos}\, k_1 = \alpha_3$

$\sin k \cdot \mathrm{Sin}\, k = \alpha_2$ $\sin k_1 \cdot \mathrm{Sin}\, k_1 = \alpha_4$

$\frac{k}{\lambda} \cdot (-\sin k \cdot \mathrm{Kos}\, k + \cos k \cdot \mathrm{Sin}\, k) = \beta_1$

$\frac{k}{\lambda} \cdot (\cos k \cdot \mathrm{Sin}\, k + \sin k \cdot \mathrm{Kos}\, k) = \beta_2$

$\frac{k_1}{\lambda_1} \cdot (-\sin k_1 \cdot \mathrm{Kos}\, k_1 + \cos k_1 \cdot \mathrm{Sin}\, k_1) = \beta_3$

$\frac{k_1}{\lambda_1} \cdot (\cos k_1 \cdot \mathrm{Sin}\, k_1 + \sin k_1 \cdot \mathrm{Kos}\, k_1) = \beta_4$

Im Zahlenbeispiel wählen wir folgende Werte:

$r = 43{,}8$ cm — $r^2 = 1918{,}44$ (cm$^2$)

$\delta = 2{,}6$ cm — $\delta^2 = 2{,}6^2 = 6{,}76$

$r_1 = 49{,}2$ cm — $\delta^3 = 2{,}6^3 = 17{,}576$

$\delta_1 = 8{,}2$ cm — $\frac{\delta}{r} = 0{,}05936$

$\lambda = 6{,}55$ cm — $\delta_1^2 = 8{,}2^2 = 67{,}24$

$\lambda_1 = 6{,}7$ cm — $\delta_1^3 = 8{,}2^3 = 551{,}368$

$\lambda_1^2 = 44{,}89$ cm$^2$ — $\frac{\delta_1}{r_1} = 0{,}16667$

Die vier Randbedingungen, aus welchen sich die vier Konstanten $C_1$, $C_4$, $D_1$, $D_4$ ergeben, lauten also folgendermaßen:

A) $$\alpha_1 \cdot C_1 + \alpha_2 \cdot C_4 - \alpha_3 \cdot D_1 - \alpha_4 \cdot D_4 = -\frac{(r - \frac{\delta}{2})}{E \cdot (\frac{\delta_1}{r_1} + \frac{\delta}{r})} \cdot p + \frac{\frac{\delta_1}{r_1}}{\frac{\delta_1}{r_1} + \frac{\delta}{r}} \cdot a + \frac{p}{E} \cdot \frac{r - \frac{\delta}{2}}{\frac{\delta}{r}}$$

B) $$\beta_1 \cdot C_1 + \beta_2 \cdot C_4 + \beta_3 \cdot D_1 + \beta_4 \cdot D_4 = 0$$

C) $$-\frac{k^2}{\lambda^2} \cdot \alpha_2 \cdot C_1 + \frac{k^2}{\lambda^2} \cdot \alpha_1 \cdot C_4 + \frac{k_1^2}{\lambda_1^2} \cdot \alpha_4 \cdot D_1 - \frac{k_1^2}{\lambda_1^2} \cdot \alpha_3 \cdot D_4 = 0$$

D) $$-\frac{k^2}{\lambda^2} \cdot \beta_2 \cdot C_1 + \frac{k^2}{\lambda^2} \cdot \beta_1 \cdot C_4 - \frac{k_1^2}{\lambda_1^2} \cdot \beta_4 \cdot D_1 + \frac{k_1^2}{\lambda_1^2} \cdot \beta_3 \cdot D_4 = 0$$

Hierbei ist:

$$k = \lambda \cdot \sqrt[4]{\frac{12\,(\frac{\delta_1}{r_1} + \frac{\delta}{r})}{r_1 \delta_1^3 + r\delta^3}} = \underline{0{,}650532}$$

$$k_1 = \lambda_1 \cdot \sqrt[4]{\frac{12}{r^2\delta^2}} = 6{,}7 \cdot 0{,}1233 \cdot \sqrt{2} = \underline{1{,}168285}$$

$\frac{k}{\lambda} = \frac{0{,}650532}{6{,}55} = 0{,}09931786$ — $\frac{k^2}{\lambda^2} = 0{,}00986404$

$\frac{k_1}{\lambda_1} = \frac{1{,}168285}{6{,}7} = 0{,}1743708$ — $\frac{k_1^2}{\lambda_1^2} = 0{,}030405176$

$\frac{k^3}{\lambda^3} = 0{,}000979675$

Für u = 1 wird:

$\alpha_1 = \text{Kos } k \cdot \cos k = +0{,}97008$ — $\alpha_3 = \text{Kos } k_1 \cdot \cos k_1 = +0{,}69119$

$\alpha_2 = \text{Sin } k \cdot \sin k = +0{,}42295$ — $\alpha_4 = \text{Sin } k_1 \cdot \sin k_1 = +1{,}33605$

$\beta_1 = \frac{k}{\lambda} \cdot (+\text{Sin } k \cdot \cos k - \text{Kos } k \cdot \sin k) = 0{,}099318 \cdot (+0{,}55522 - 0{,}73899) = 0{,}099318 \cdot (-0{,}18377) = -0{,}0182$

$\beta_2 = \frac{k}{\lambda} \cdot (+\text{Sin } k \cdot \cos k + \text{Kos } k \cdot \sin k) = 0{,}099317 \cdot (+0{,}55522 + 0{,}73899) = 0{,}099318 \cdot (+1{,}29421) = +0{,}1285$

$\beta_3 = \frac{k_1}{\lambda_1} \cdot (\text{Sin } k_1 \cdot \cos k_1 - \text{Kos } k_1 \cdot \sin k_1) = 0{,}174370 \cdot (+0{,}56928 - 1{,}62215) = 0{,}174371 \cdot (-1{,}05287) =$

$= -0{,}18359$

$$\beta_4 = \frac{k_1}{\lambda_1} \cdot (\mathrm{Sin}\, k_1 \cdot \cos k_1 + \mathrm{Kos}\, k_1 \cdot \sin k_1) = 0{,}174370 \cdot$$
$$\cdot (+\,0{,}56928 + 1{,}62215) = 0{,}174371 \cdot (+\,2{,}19143) = +\,0{,}38212$$

Nach Einsetzen der Werte für $\alpha$ und $\beta$ erhalten wir die Gleichungen:

A) $+\,0{,}97008 \cdot C_1 + 0{,}42295 \cdot C_4 - 0{,}69119 \cdot D_1 - 1{,}33605 \cdot D_4 = U$

$$U = -\frac{(43{,}8-1{,}3)\cdot p}{E\cdot(0{,}16667+0{,}059361)} + \frac{0{,}16667}{0{,}226031} \cdot a + \frac{43{,}8 - 1{,}3}{E\cdot 0{,}059361} \cdot p = +\,0{,}00024217 \cdot p + 0{,}737377 \cdot a$$

(wobei)

B) $-\,0{,}01825 \cdot C_1 + 0{,}12854 \cdot C_4 - 0{,}18359 \cdot D_1 + 0{,}38212 \cdot D_4 = 0$

C) $-\,0{,}004172 \cdot C_1 + 0{,}009568 \cdot C_4 + 0{,}040623 \cdot D_1 - 0{,}021016 \cdot D_4 = 0$

D) $+\,0{,}001267 \cdot C_1 + 0{,}000180 \cdot C_4 + 0{,}011618 \cdot D_1 + 0{,}005582 \cdot D_4 = 0$

---

Aus diesen Gleichungen folgt:

$C_1 = +\,0{,}7422848 \cdot U = +\,0{,}547338543 \cdot a + 1{,}79760 \cdot 10^{-4} \cdot p = +0{,}54734 \cdot a + 1{,}7976 \cdot 10^{-4} \cdot p$

$C_4 = +\,0{,}3096157 \cdot U = +\,0{,}2283013 \cdot a + 0{,}749797 \cdot 10^{-4} \cdot p$

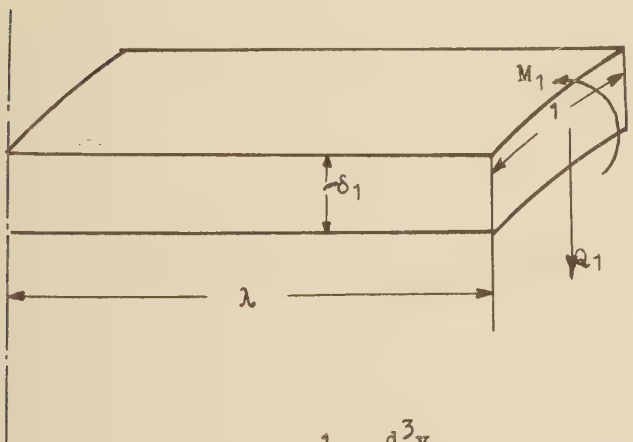
$D_1 = -\,0{,}0428959 \cdot U = -\,0{,}03163015 \cdot a - 0{,}103881 \cdot 10^{-4} \cdot p$

$D_4 = -\,0{,}08930848 \cdot U = -\,0{,}0658534 \cdot a - 0{,}216279 \cdot 10^{-4} \cdot p$

Die Größen $C_1$, $C_4$, $D_1$ und $D_4$ sind jetzt als Funktion von U, das heißt, als Funktionen des Schrumpfmaßes a und des Innendruckes p ermittelt worden.

Mit diesen Konstanten lassen sich dann die Momente und Querkräfte ermitteln, die pro Längeneinheit am Rand des Schrumpfringes auftreten, sofern die Gleichungen 1 - 3 nebeneinander bestehen sollen. Das Moment $M_1$ folgt für u = 1 aus:

Abb.7




$$+\,M = +\,E \cdot J \cdot \frac{1}{\lambda^2} \cdot \frac{dy^2}{du^2}$$

$$M_1 = E\cdot J\,\frac{2k^2}{\lambda^2} \cdot [-\alpha_2 \cdot C_1 + \alpha_1 \cdot C_4]$$

und da $J = \frac{\delta_1^3}{12}$, wobei die Breite b = 1 gesetzt ist, wird:

16.) $M_1 = E \cdot \frac{\delta_1^3}{6} \cdot \frac{k^2}{\lambda^2} \cdot [-\alpha_2 \cdot C_1 + \alpha_1 \cdot C_4]$

und die Querkraft $Q_1$, die gleichfalls am Ende des Schrumpfringes, also im Abstand $x = \lambda$ wirkt, folgt

aus: $Q = E \cdot J \cdot \frac{1}{\lambda^3} \cdot \frac{d^3y}{du^3}$

17.) $Q_1 = E \cdot \frac{\delta_1^3}{6} \cdot \frac{k^2}{\lambda^2} \cdot [-\beta_2 \cdot C_1 + \beta_1 \cdot C_4]$

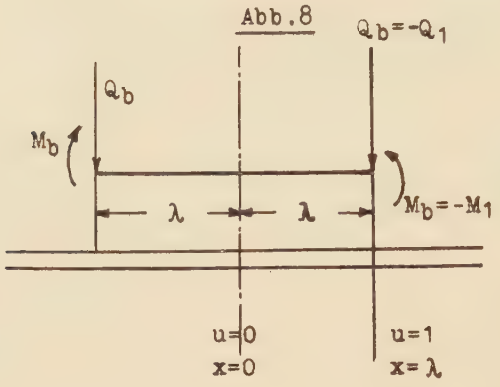
$M_1$ und $Q_1$ beziehen sich auf die Längeneinheit des mittleren Umfanges und haben die Dimensionen $\frac{kg\ cm}{cm} = kg$, bzw. $\frac{kg}{cm}$.

Das Auftreten der Randkräfte $M_1$ und $Q_1$ hat sich somit als notwendige Folgerung des gleichzeitigen Bestehens der Gl.1 bis 3 auf S.1 ergeben, wodurch der Nachweis erbracht

ist, daß zwischen Ring und Rohr nur dann lediglich normale Kräfte auftreten, wenn zur Einwirkung der Schrumpfung a und des Innendruckes p noch die äußeren Belastungen $M_1$ und $Q_1$ am Rande des Schrumpfringes hinzutreten.

II. 3.) Wir untersuchen jetzt den Spannungszustand bei Belastung des Schrumpfringrandes durch $M_b = -M_1$ und $Q_b = -Q_1$ nach nebenstehender Skizze.

Abb.8




Durch Überlagerung dieses Spannungszustandes mit dem vorhergehenden erhalten wir dann die reine Beanspruchung durch Schrumpfung und Innendruck bei kräftefreiem Schrumpfringrand.

Bei der angegebenen Randbelastung treten jetzt zwischen Schrumpfring und Zylinderrohr Schubspannungen auf, die aus Symmetriegründen in der Mitte des Schrumpfringes verschwinden, und beiderseits in gleichen Abständen von der Mitte gleich groß sind, jedoch mit entgegengesetztem Vorzeichen. An der Stelle $u = \pm 1$, beim Übergang zum freien Rohr muß die Schubspannung ebenfalls verschwinden.

Diesen Bedingungen genügen wir durch den Ansatz:

18.) $$\tau = u \cdot (1 - u^2) \cdot [\tau_0 + \tau_2 \cdot u^2 + \tau_4 \cdot u^4 + \tau_6 \cdot u^6 + .....] ,$$

wobei $\tau_0$, $\tau_2$, $\tau_4$, $\tau_6$ ..... noch zu bestimmende Konstanten sind.

Der gleichzeitig zwischen Rohr und Schrumpfring auftretende Normaldruck werde mit $p_2$ bezeichnet.

Der Betrachtung liegt ein Segment zu Grunde, dessen mittlere Breite = 1 gesetzt wird. Siehe nachstehende Skizze.

Abb.9

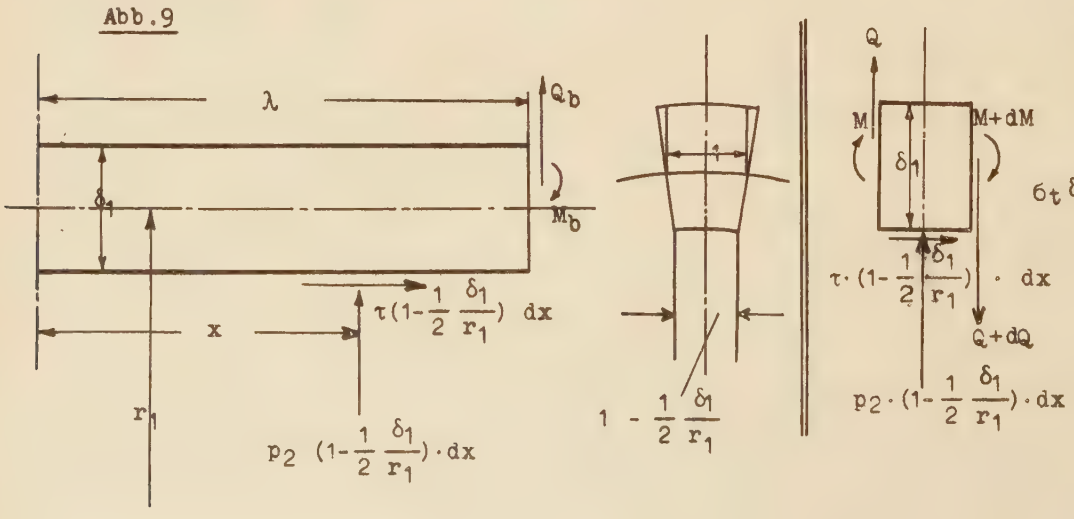
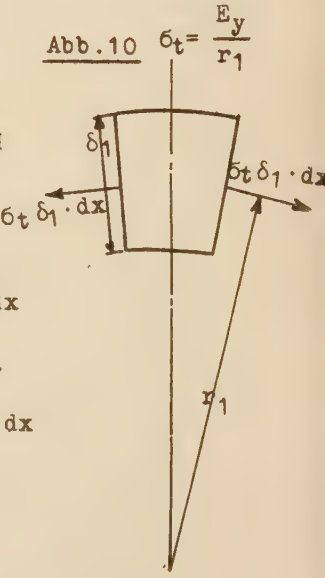



Abb.10 $\sigma_t = \frac{E_y}{r_1}$



Die Gleichgewichtsbetrachtung an einem Stück von der Länge dx liefert:

19.) a) $\frac{dM}{dx} = Q - \tau \cdot (1 - \frac{1}{2}\frac{\delta_1}{r_1}) \cdot \frac{\delta_1}{2}$

20.) b) $\frac{dQ}{dx} = p_2 \cdot (1 - \frac{1}{2}\frac{\delta_1}{r_1}) - \frac{E\,y}{r_1^2} \cdot \delta_1$

Die Gleichung der Biegungslinie $E \cdot J \cdot \frac{d^2y}{dx^2} = M$ liefert somit nach zweimaligem Differentieren:

21.) $E \cdot \frac{\delta_1^3}{12} \cdot \frac{d^4y}{dx^4} + \frac{E\,y \cdot \delta_1}{r_1^2} = p_2 \cdot (1 - \frac{1}{2}\frac{\delta_1}{r_1}) - \frac{d\tau}{dx} \cdot (1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{\delta_1}{r_1}) \cdot \frac{\delta_1}{2}$

oder 22.) $\frac{d^4y}{dx^4} + \frac{12\,y}{r_1^2\,\delta_1^2} = \frac{12}{E\,\delta_1^3} \cdot (1 - \frac{1}{2}\frac{\delta_1}{r_1}) \cdot [p_2 - \frac{d\tau}{dx} \cdot \frac{\delta_1}{2}]$

In analoger Weise erhält man am Zylinderrohr unter dem Schrumpfring:

22. a) $\frac{d^4y}{dx^4} + \frac{12\,y}{r^2 \cdot \delta^2} = \frac{12}{E \cdot \delta^3} (1 + \frac{1}{2}\frac{\delta}{r}) (- p_2 - \frac{d\tau}{dx} \cdot \frac{\delta}{2})$

Am freien Rohr gilt die Gleichung 2b)

22. b) $\frac{d^4y}{dx^4} + \frac{12\,y}{r^2\,\delta^2} = 0$

Wenn man jetzt aus den Gleichungen 22 und 22a $p_2$ eliminiert, so erhält man nach Einführung von $u = \frac{x}{\lambda}$ in analoger Weise, wie vorher auf S.1 u. 2:

23.) $\frac{1}{4k^4} \cdot \frac{d^4y}{du^4} + y = -\frac{(\delta_1 + \delta)\ (r + \frac{\delta}{2})}{2\,E\,\lambda \cdot (\frac{\delta_1}{r_1} + \frac{\delta}{r})} \cdot \frac{d\tau}{du}$

Für das freie Rohr erhält man:

24.) $\frac{1}{4k_1^4} \cdot \frac{d^4y}{du^4} + y = 0$

Dabei sind k und $k_1$ die unter 5.) und 7.) dargestellten Größen.

Bestimmung des partikulären Integrals der ersten Gleichung.

Um eine übersichtliche Form zu erhalten, werde zunächst die partikuläre Lösung der Gleichung:

25.) $\frac{1}{4k^4} \cdot \frac{d^4y}{du^4} + y = u^Q$ angeschrieben. ( Q ist hierbei ganzzahlig gedacht.)

Diese lautet:

26.) $y = u^Q - (Q)_4 \cdot \frac{u^{Q-4}}{4k^4} + (Q)_8 \cdot \frac{u^{Q-8}}{(4k^4)^2} - \ldots\ldots + \ldots\ldots$

Dabei ist:

$$(Q)_n = Q\,(Q-1)\,(Q-2)\,(Q-3)\,\ldots\ldots\,(Q-n+1)$$

ein Produkt von n aufeinanderfolgenden Zahlen, deren größte Q ist. Bei den vorliegenden Anwendungen ist Q stets eine gerade Zahl, die Reihe schließt dann mit der zweiten oder nullten Potenz von u, je nachdem Q durch 4 teilbar ist oder nicht.

Bei Einführung des Ausdruckes für $\tau$ hat man:

27.) $$\frac{d\tau}{du} = \tau_0 (1 - 3u^2) + \tau_2 \cdot (3u^2 - 5u^4) + \tau_4 \cdot (5u^4 - 7u^6) + \tau_6 \cdot (7u^6 - 9u^8)$$

Zur Abkürzung werde jetzt gesetzt:

27.a) $$\frac{(\delta_1 + \delta)\,(r + \frac{\delta}{2})}{2\lambda \cdot (\frac{\delta_1}{r_1} + \frac{\delta}{r})} = s$$

Das gesuchte partikuläre Integral erscheint dann in der Form:

28.) $$y\ part. = -\frac{s}{E} \cdot \left[ \begin{array}{l} \tau_0 (1-3u^2) + \tau_2 \cdot (3u^2 - 5 \cdot \{u^4 - \frac{4\cdot3\cdot2\cdot1}{4k^4}\}) + \\ + \tau_4 \cdot (5 \cdot \{u^4 - \frac{4\cdot3\cdot2\cdot1}{4k^4}\} - 7 \cdot \{u^6 - \frac{6\cdot5\cdot4\cdot3}{4k^4} \cdot u^2\}) + \\ + \tau_6 \cdot (7 \cdot \{u^6 - \frac{6\cdot5\cdot4\cdot3}{4k^4} \cdot u^2\} - 9 \cdot \{u^8 - \frac{8\cdot7\cdot6\cdot5}{4k^4} \cdot u^4 + \frac{8!}{(4k^4)^2}\}) \end{array} \right]$$

Dieser Klammerwert werde mit T(u) bezeichnet, so daß

28.a) $$y\ part. = -\frac{s}{E} \cdot T(u)$$

Das totale Integral ist somit:

29.) $$y = C_1 \cdot \cos k\,u \cdot Kos\ k\,u + C_4 \cdot \sin k\,u \cdot Sin\ k\,u - \frac{s}{E} \cdot T(u)$$

gültig im Bereiche des Schrumpfringes, ferner:

30.) $$y = D_1 \cdot \cos k_1\,u \cdot Kos\ k_1\,u + D_4 \cdot \sin k_1\,u \cdot Sin\ k_1\,u$$

gültig für das freie Rohr.

Die Werte $C_1$, $C_4$, $D_1$, $D_4$ werden in analoger Weise wie auf Seite 4 bestimmt. Das Gleichungssystem lautet:

31.) $$\alpha_1 \cdot C_1 + \alpha_2 \cdot C_4 - \alpha_3 \cdot D_1 - \alpha_4 \cdot D_4 = \frac{s}{E} \cdot T_{(1)}$$

32.) $$\beta_1 \cdot D_1 + \beta_2 \cdot C_4 + \beta_3 \cdot D_1 + \beta_4 \cdot D_4 = \frac{1}{\lambda} \cdot \frac{s}{E} \cdot T_{(1)}'$$

33.) $$-\frac{k^2}{\lambda^2} \cdot \alpha_2 \cdot C_1 + \frac{k^2}{\lambda^2} \cdot \alpha_1 \cdot C_4 + \frac{k_1^2}{\lambda_1^2} \cdot \alpha_4 \cdot D_1 - \frac{k_1^2}{\lambda_1^2} \cdot \alpha_3 \cdot D_4 = \frac{1}{\lambda^2} \cdot \frac{s}{E} \cdot T_{(1)}''$$

34.) $$-\frac{k^2}{\lambda^2} \cdot \beta_2 \cdot C_1 + \frac{k^2}{\lambda^2} \cdot \beta_1 \cdot C_4 - \frac{k_1^2}{\lambda_1^2} \cdot \beta_4 \cdot D_1 + \frac{k_1^2}{\lambda_1^2} \cdot \beta_3 \cdot D_4 = \frac{1}{\lambda^3} \cdot \frac{s}{E} \cdot T_{(1)}'''$$

Hier bedeuten $T_{(1)}$ bis $T_{(1)}'''$ die Werte von T(u) bis $T_{(u)}'''$ für u = 1.

Gleichungen zur Ermittlung der Konstanten $C_1$, $C_4$, $D_1$, $D_4$.

31.) $$\alpha_1 \cdot C_1 + \alpha_2 \cdot C_4 - \alpha_3 \cdot D_1 - \alpha_4 \cdot D_4 = \frac{s}{E} \cdot T_{(1)}$$

32.) $$\beta_1 \cdot C_1 + \beta_2 \cdot C_4 + \beta_3 \cdot D_1 + \beta_4 \cdot D_4 = \frac{1}{\lambda} \cdot \frac{s}{E} \cdot T_{(1)}'$$

33.) $$-\frac{k^2}{\lambda^2} \cdot \alpha_2 \cdot C_1 + \frac{k^2}{\lambda^2} \cdot \alpha_1 \cdot C_4 + \frac{k_1^2}{\lambda_1^2} \cdot \alpha_4 \cdot D_1 - \frac{k_1^2}{\lambda_1^2} \cdot \alpha_3 \cdot D_4 = \frac{1}{\lambda^2} \cdot \frac{s}{E} \cdot T_{(1)}''$$

34.) $-\frac{k^2}{\lambda^2} \cdot \beta_2 \cdot C_1 + \frac{k^2}{\lambda^2} \cdot \beta_1 \cdot C_4 - \frac{k_1^2}{\lambda_1^2} \cdot \beta_4 \cdot D_1 + \frac{k_1^2}{\lambda_1^2} \cdot \beta_3 \cdot D_4 = \frac{1}{\lambda^3} \cdot \frac{s}{E} \cdot T'''_{(1)}$

---

31.) $0{,}97008 \cdot C_1 + 0{,}42295 \cdot C_4 - 0{,}69119 \cdot D_1 - 1{,}33605 \cdot D_4 = \frac{s}{E} \cdot T_{(1)}$

32.) $-0{,}01825 \cdot C_1 + 0{,}12854 \cdot C_4 - 0{,}18359 \cdot D_1 + 0{,}38212 \cdot D_4 = \frac{1}{\lambda} \cdot \frac{s}{E} \cdot T'_{(1)}$

33.) $(-0{,}009864) \cdot (0{,}42295) \cdot C_1 + 0{,}009864 \cdot 0{,}97008 \cdot C_4 + 0{,}030405 \cdot$
$\cdot 1{,}33605 \cdot D_1 - 0{,}030405 \cdot 0{,}69119 \cdot D_4 = \frac{1}{\lambda^2} \cdot \frac{s}{E} \cdot T''_{(1)}$

34.) $(-0{,}009864) \cdot 0{,}12854 \cdot C_1 + 0{,}009864 \cdot (-0{,}01825) \cdot C_4 - 0{,}030405 \cdot 0{,}38212 \cdot D_1 +$
$+ 0{,}030405 \cdot (-0{,}18359) \cdot D_4 = \frac{1}{\lambda^3} \cdot \frac{s}{E} \cdot T'''_{(1)}$

---

Der Wert von $T_{(u)}$ kann, nach $\tau_0$ bis $\tau_6$ geordnet, noch in folgender Form angeschrieben werden:

$$T_{(u)} = \tau_0 \cdot g_{0(u)} + \tau_2 \cdot g_{2(u)} + \tau_4 \cdot g_{4(u)} + \tau_6 \cdot g_{6(u)} \cdots\cdots \qquad 35.)$$

wobei:

$$g_{0(u)} = 1 - 3\,u^2$$
$$g_{2(u)} = \frac{30}{k^4} + 3\,u^2 - 5\,u^4$$
$$g_{4(u)} = -\frac{30}{k^4} + 630\,\frac{u^2}{k^4} + 5\,u^4 - 7\,u^6$$
$$g_{6(u)} = -\frac{22680}{k^8} - \frac{630\,u^2}{k^4} + \frac{3780\,u^4}{k^4} + 7\,u^6 - 9\,u^8$$

Bildet man noch die Ableitungen der Funktion g bis zur 3. Ordnung und setzt u = 1, so folgen schließlich die zur Ausrechnung der rechten Seiten der Gleichungen 31 bis 34 benötigten Größen.

$$T_{(1)} = -2 \cdot \tau_0 + \left(\frac{30}{k^4} - 2\right) \cdot \tau_2 + \left(\frac{600}{k^4} - 2\right) \cdot \tau_4 + \left(-\frac{22680}{k^8} + \frac{3150}{k^4} - 2\right) \cdot \tau_6 =$$

$$\underline{T_{(1)} = -2 \cdot \tau_0 + 165{,}51354 \cdot \tau_2 + 3348{,}2708 \cdot \tau_4 - 689549{,}88 \cdot \tau_6}$$

$$T'_{(1)} = -6 \cdot \tau_0 - 14 \cdot \tau_2 + \left(\frac{1260}{k^4} - 22\right) \cdot \tau_4 + \left(\frac{13860}{k^4} - 30\right) \cdot \tau_6 =$$

$$\underline{T'_{(1)} = -6 \cdot \tau_0 - 14 \cdot \tau_2 + 7013{,}568 \cdot \tau_4 + 77361{,}25 \cdot \tau_6}$$

$$T''_{(1)} = -6 \cdot \tau_0 - 54 \cdot \tau_2 + \left(\frac{1260}{k^4} - 150\right) \cdot \tau_4 + \left(\frac{44100}{k^4} - 294\right) \cdot \tau_6 =$$

$$\underline{T''_{(1)} = -6 \cdot \tau_0 - 54 \cdot \tau_2 + 6885{,}568 \cdot \tau_4 + 245950{,}9 \cdot \tau_6}$$

$$T'''_{(1)} = -120 \cdot \tau_2 - 720 \cdot \tau_4 + \left(\frac{90720}{k^4} - 2184\right) \cdot \tau_6 =$$

$$\underline{T'''_{(1)} = -120 \cdot \tau_2 - 720 \cdot \tau_4 + 504376{,}94 \cdot \tau_6}$$

Der noch benötigte Wert von $\frac{s}{E}$ folgt nach Seite 8:

$$\frac{s}{E} = \frac{(2{,}6 + 8{,}2)\ (43{,}8 + 1{,}3)}{13{,}1 \cdot (0{,}16667 + 0{,}059361)} \cdot \frac{10^{-6}}{2{,}18} = 0{,}75458 \cdot 10^{-4}$$

Die Lösung der Gleichungen 31 bis 34 nach den Unbekannten $C_1$, $C_4$, $D_1$, $D_4$ ergibt:

36.) $10^4 \cdot C_1 = + 0{,}5601 \cdot T_{(1)} - 0{,}07720 \cdot T'_{(1)} - 0{,}460126 \cdot T''_{(1)} - 0{,}33577 \cdot T'''_{(1)}$

37.) $10^4 \cdot C_4 = + 0{,}233624 \cdot T_{(1)} + 0{,}4578 \cdot T'_{(1)} + 0{,}6761 \cdot T''_{(1)} + 0{,}14284 \cdot T'''_{(1)}$

38.) $10^4 \cdot D_1 = - 0{,}0323674 \cdot T_{(1)} - 0{,}055057 \cdot T'_{(1)} + 0{,}12968 \cdot T''_{(1)} - 0{,}1348 \cdot T'''_{(1)}$

39.) $10^4 \cdot D_4 = - 0{,}067405 \cdot T_{(1)} + 0{,}11736 \cdot T'_{(1)} - 0{,}18714 \cdot T''_{(1)} - 0{,}128845 \cdot T'''_{(1)}$

Setzt man jetzt noch die bereits ermittelten Werte von T und der zugehörigen Ableitungen (nach Seite 9) ein, so erhält man schließlich die Konstanten C und D als Funktionen der Größen $\tau_0$ bis $\tau_6$.

40.) $C_1 = + 10^{-4} \cdot 2{,}1038 \cdot \tau_0 + 0{,}0158924 \cdot \tau_2 - 0{,}159256 \cdot \tau_4 - 67{,}471223 \cdot \tau_6$

41.) $C_4 = - 10^{-4} \cdot 7{,}27065 \cdot \tau_0 - 0{,}0021391 \cdot \tau_2 + 0{,}854553 \cdot \tau_4 + 11{,}26532 \cdot \tau_6$

42.) $D_1 = - 10^{-4} \cdot 0{,}38300 \cdot \tau_0 + 0{,}0004587 \cdot \tau_2 + 0{,}0495455 \cdot \tau_4 - 1{,}803544 \cdot \tau_6$

43.) $D_4 = + 10^{-4} \cdot 0{,}55349 \cdot \tau_0 + 0{,}001276748 \cdot \tau_2 - 0{,}059938 \cdot \tau_4 - 5{,}545547 \cdot \tau_6$

Die totalen Lösungen 29 und 30 erhalten wir nach Einführung der vorstehend ermittelten Integrationskonstanten, sowie der Größe $T_{(u)}$ nach Seite 8.

Im Bereich des Schrumpfringes:

44.) ... $y = \tau_0 \cdot f_{0(u)} + \tau_2 \cdot f_{2(u)} + \tau_4 \cdot f_{4(u)} + \tau_6 \cdot f_{6(u)}$

und am freien Rohr:

45.) $y = \tau_0 \cdot \varphi_{0(u)} + \tau_2 \cdot \varphi_{2(u)} + \tau_4 \cdot \varphi_{4(u)} + \tau_6 \cdot \varphi_{6(u)}$

Hierbei ist:

$f_{0(u)} = +0{,}00021038 \cdot \text{Kos k u} \cdot \cos \text{k u} - 0{,}000727065 \cdot \text{Sin k u} \cdot \sin \text{k u} - \frac{s}{E} \cdot g_{0(u)}$

$f_{2(u)} = +0{,}0158924 \cdot \text{Kos k u} \cdot \cos \text{k u} - 0{,}0021391 \cdot \text{Sin k u} \cdot \sin \text{k u} - \frac{s}{E} \cdot g_{2(u)}$

$f_{4(u)} = -0{,}159256 \cdot \text{Kos k u} \cdot \cos \text{k u} + 0{,}854553 \cdot \text{Sin k u} \cdot \sin \text{k u} - \frac{s}{E} \cdot g_{4(u)}$

$f_{6(u)} = -67{,}471223 \cdot \text{Kos k u} \cdot \cos \text{k u} + 11{,}26532 \cdot \text{Sin k u} \cdot \sin \text{k u} - \frac{s}{E} \cdot g_{6(u)}$

$\varphi_{0(u)} = - 0{,}0000383 \cdot \text{Kos } k_1 u \cdot \cos k_1 u + 0{,}00005535 \cdot \text{Sin } k_1 u \cdot \sin k_1 u$

$\varphi_{2(u)} = + 0{,}0004587 \cdot \text{Kos } k_1 u \cdot \cos k_1 u + 0{,}00127675 \cdot \text{Sin } k_1 u \cdot \sin k_1 u$

$\varphi_{4(u)} = + 0{,}049455 \cdot \text{Kos } k_1 u \cdot \cos k_1 u - 0{,}059838 \cdot \text{Sin } k_1 u \cdot \sin k_1 u$

$\varphi_{6(u)} = - 1{,}803544 \cdot \text{Kos } k_1 u \cdot \cos k_1 u - 5{,}545547 \cdot \text{Sin } k_1 u \cdot \sin k_1 u$

Mit dem gefundenen Ausdruck für die Biegungsordinaten können alle weiteren maßgebenden Größen durch die noch unbekannten Schubspannungsziffern $\tau_0$ bis $\tau_6$ ausgedrückt werden. Zu ihrer Ermittlung soll dann nachstehende Erwägung führen:

Die Werte $\tau_0$ bis $\tau_6$ haben zunächst die statische Bedingung zu erfüllen, daß sie am Rand des Schrumpfringes mit den Kräften $Q_b = -Q_1$ und $M_b = -M_1$ vereinbar sind, das heißt, sie müssen bei u = 1 den Gleichungen genügen:

45.) $$\frac{E \cdot \delta_1^3}{12\,\lambda^2} \cdot \frac{d^2y}{du^2} = -M_1$$

46.) $$\frac{E \cdot \delta_1^3}{12\,\lambda^3} \cdot \frac{d^3y}{du^3} = -Q_1 \qquad \text{o d e r}$$

47.) $$\frac{E \cdot \delta_1^3}{12\,\lambda^2} \cdot [\tau_0 \cdot f_0''(1) + \tau_2 \cdot f_2''(1) + \tau_4 \cdot f_4''(1) + \tau_6 \cdot f_6''(1)] = -M_1$$

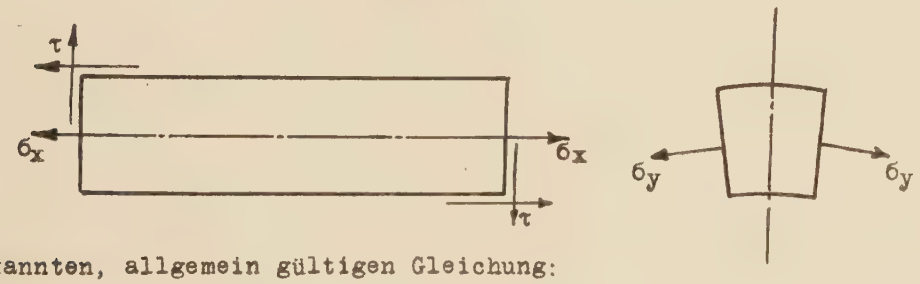
48.) $$\frac{E \cdot \delta_1^3}{12\,\lambda^3} \cdot [\tau_0 \cdot f_0'''(1) + \tau_2 \cdot f_2'''(1) + \tau_4 \cdot f_4'''(1) + \tau_6 \cdot f_6'''(1)] = -Q_1$$

Dabei sind $M_1$ und $Q_1$ durch die Gl. 16 und 17 gegeben.

Die noch fehlenden Gleichungen für die Größen $\tau_0$, $\tau_2$, $\tau_4$ und $\tau_6$ folgen aus dem nach Castigliano benannten Satz vom Kleinstwert der Formänderungsarbeit unter Berücksichtigung der vorerwähnten beiden statischen Bedingungen über die Kräfte am Rand des Schrumpfringes (vergl. z.B. F ö p p l "Drang und Zwang", Bd.I, § 13, 14).

## Ausdruck für die Formänderungsarbeit.

Abb.11




In der bekannten, allgemein gültigen Gleichung:

49.) $$A = \frac{1}{2G} \cdot [\frac{1}{2} \cdot (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)^2 - \frac{1}{2(m+1)} \cdot (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)^2 + \tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2]$$

(zitiert nach Föppl) haben wir im vorliegenden Fall aus Symmetriegründen $\tau_{xy}$ und $\tau_{yz}$ zu streichen; für $\tau_{zx}$ werde einfacher $\tau$ geschrieben. Ferner vernachlässigen wir den unbedeutenden Betrag des radial gerichteten Druckes $\sigma_r$ und erhalten pro Volumeneinheit zunächst:

50.) $$A = \frac{1}{4G} \cdot [\frac{m}{m+1} \cdot (\sigma_x + \sigma_y)^2 - 2\sigma_x \cdot \sigma_y + 2\tau^2]$$ *)

Hierin streichen wir noch den unwesentlichen, aus der Quadrierung herrührenden Betrag

$$\frac{m}{m+1} \cdot 2\sigma_x \cdot \sigma_y - 2\sigma_x \cdot \sigma_y$$

und erhalten mit $G = \frac{E}{2} \cdot \frac{m}{m+1}$ für das gesamte Volumen

51.) $$A = \int [\frac{\sigma_x^2 + \sigma_y^2}{2E} + \frac{\tau^2}{2G}] \cdot dV$$

Der von $\sigma_x$ herrührende Betrag läßt sich in bekannter Weise durch Normalkraft und Biegungsmoment ausdrücken, womit A in vier Bestandteile zerlegt werde, die mit $A_1$ bis $A_4$ bezeichnet werden sollen.

*) Vergleiche: Müller-Breslau II, 1; 4.Aufl., Seite 46.
Ferner: Föppl: "Drang und Zwang", Bd.I (München 1920).

52.) $A = \sum_{i=1}^{4} A_i \qquad \int \frac{N^2 \cdot dx}{2\,E \cdot F} = A_1 \qquad \int \frac{M^2 \cdot dx}{2\,E \cdot J} = A_2 \qquad \int \frac{\sigma_y^2 \cdot dV}{2\,E} = A_3 \qquad \int \frac{\tau^2 \cdot dV}{2\,G} = A_4$

53.) $A = \int \frac{N^2 \cdot dx}{2\,E \cdot F} + \int \frac{M^2 \cdot dx}{2\,E \cdot J} + \int \frac{\sigma_y^2 \cdot dV}{2\,E} + \int \frac{\tau^2 \cdot dV}{2\,G}$

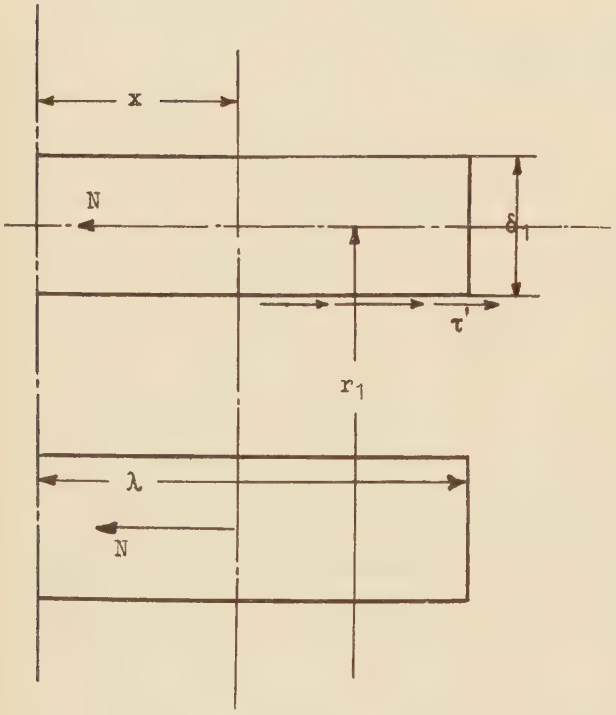
Setzt man jetzt in $A_3$ für $\sigma_y = E \cdot \frac{y}{r}$ ein, so wird

54.) $A_3 = \int \frac{\sigma_y^2 \cdot dV}{2\,E} = \frac{E}{2r^2} \cdot \iint y^2 dx \cdot dF = \frac{E \cdot F}{2r^2} \cdot \int y^2 \cdot dx$

Der Rotationssymmetrie wegen genügt es, die Formänderungsarbeit für einen Sektor anzunehmen, für den wir unter Forthebung gleichbleibender Faktoren in der Mitte des Schrumpfringes die Breite 1 annehmen.

Wir setzen also:

Abb.12.




$F_1 = 1 \cdot \delta_1 \qquad J_1 = \frac{\delta_1^3}{12}$

$F = \frac{r}{r_1} \cdot \delta \qquad J = \frac{\delta^3}{12} \cdot \frac{r}{r_1}$

Da $\tau$ im Gegensatz zu früher hier allgemein die Spannung an einem inneren Raumelement bedeutet, werde die Schubspannung zwischen Schrumpfring und Rohr mit $\tau'$ bezeichnet. Laut S.8 haben wir:

$\tau' = \sum_m \tau_m \cdot (u^{m+1} - u^{m+3}) \ldots\ldots$ 55.)

wobei für m nur die Zahlen 0, 2, 4, 6 ... einzusetzen sind. Dann wird N =

56.) $N = \int_x^{\lambda} \tau' \cdot (1 - \frac{\delta_1}{2r_1}) \cdot dx =$

$= \lambda \cdot \frac{r}{r_1} \cdot (1 + \frac{\delta}{2r}) \cdot \int_u^1 \tau' \cdot du$

Die Integration liefert:

57.) $N = \lambda \cdot \frac{r}{r_1} \cdot (1 + \frac{\delta}{2 \cdot r}) \cdot \sum_m \tau_m \cdot t_{m(u)}$, wobei

58.a) $t_0 = \frac{1}{1 \cdot 4} - u^2 \cdot (\frac{1}{2} - \frac{u^2}{4})$

58.b) $t_2 = \frac{1}{2 \cdot 6} - u^4 \cdot (\frac{1}{4} - \frac{u^2}{6})$

58.c) $t_4 = \frac{1}{3 \cdot 8} - u^6 \cdot (\frac{1}{6} - \frac{u^2}{8})$

58.d) $t_6 = \frac{1}{4 \cdot 10} - u^8 \cdot (\frac{1}{8} - \frac{u^2}{10})$

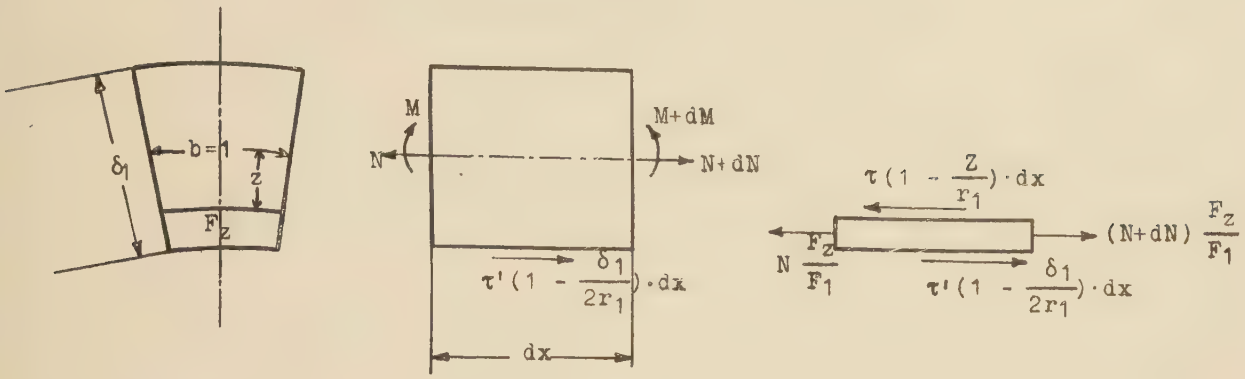
Ein gleich großer Druck ergibt sich im Rohr, im Bereiche des Schrumpfringes; im freien Rohr

ist die Normalkraft

$$N = 0$$

Eine weitere Umformung erfordert $A_4$.

Abb.13




Die Gleichgewichtsbedingungen ergeben hier:

59.a) $$dN = - \tau' \cdot (1 - \frac{\delta_1}{2r_1}) \cdot dx$$

Führt man im Abstand z von der Mittellinie des Ringes einen konzentrischen Schnitt, wodurch in Abb. Nr.13 die Fläche $F_z$ abgegrenzt werde, so gilt für die im Schnitt auftretende Spannung $\tau$

59.b) $$\tau \cdot (1 - \frac{z}{r_1}) = \tau' \cdot (1 - \frac{\delta_1}{2r_1}) + \frac{dN}{dx} \cdot \frac{F_z}{F_1} + \frac{dM}{dx} \cdot \frac{1}{J} \cdot \int z \cdot dF$$

Das letzte Glied rührt aus dem Überschuß der Biegungsspannungen her.

Nach unserer Festsetzung gilt:

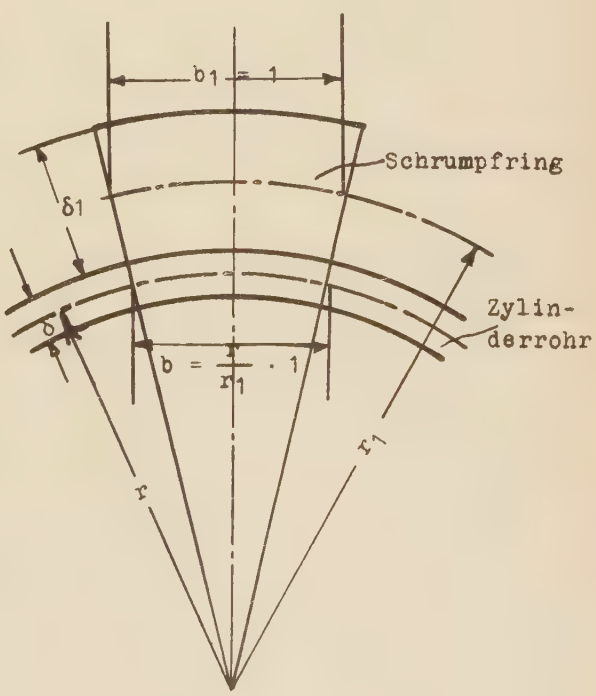
$$F_1 = \delta_1 \quad \text{(Schrumpfring)}$$

und

$$F = \frac{r}{r_1} \cdot \delta \quad \text{(Rohr)}$$

Siehe Skizze.

Abb.14




Aus 59.a) und 59.b) folgt:

59.c) $$\tau \cdot (1 - \frac{z}{r_1}) = \tau' \cdot (1 - \frac{\delta_1}{2r_1}) \cdot$$

$$\cdot \frac{F_1 - F_z}{F_1} + \frac{dM}{dx} \cdot \frac{1}{J} \cdot \int z \cdot dF$$

Dabei hat das Integral den Wert:

60.) $$\int z \cdot dF = F_z \cdot \frac{1}{2} \cdot (\frac{\delta_1}{2} + z)$$

Zur Umformung setzen wir näherungsweise:

$$\frac{F_z}{F_1} = \frac{\frac{\delta_1}{2} - z}{\delta_1} \quad \text{oder: mit } F_1 = 1 \cdot \delta_1$$

$$F_z = \frac{\delta_1}{2} - z \quad \text{und:} \quad F_1 - F_z = \frac{\delta_1}{2} + z \ ,$$

61.) $$\int z \cdot dF = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\delta_1^2}{4} - z^2\right)$$

Vernachlässigt man jetzt noch $\frac{z}{r}$ und $\frac{\delta_1}{2r_1}$ gegen 1, so hat man:

62.) $$\tau = \tau' \cdot \frac{\frac{\delta_1}{2} + z}{\delta_1} + E \cdot \frac{d^3y}{dx^3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\delta_1^2}{4} - z^2\right)$$

Aufstellung der Gleichungen zur Bestimmung von $\tau_0$ bis $\tau_6$.

Wir ermitteln zunächst die später benötigten Ableitungen der Größen $A_1$ bis $A_4$ nach den $\tau_m$ und erhalten:

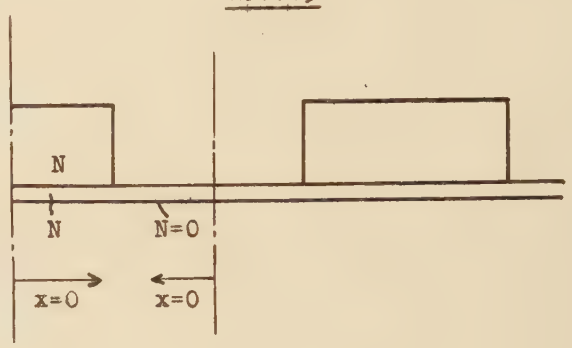
63.) $$\frac{\partial A_1}{\partial \tau_m} = \int N \cdot \frac{\partial N}{\partial \tau_m} \cdot \frac{dx}{E \cdot F}$$

64.) $$\frac{\partial A_2}{\partial \tau_m} = \int M \cdot \frac{\partial M}{\partial \tau_m} \cdot \frac{dx}{E \cdot J}$$

65.) $$\frac{\partial A_3}{\partial \tau_m} = \frac{E \cdot F}{r^2} \cdot \int y \frac{\partial y}{\partial \tau_m} \cdot dx$$

66.) $$\frac{\partial A_4}{\partial \tau_m} = \int \tau \cdot \frac{\partial \tau}{\partial \tau_m} \cdot \frac{d\,V}{G}$$

Abb.15




---

Aus 57.) folgt:

67.) $$\frac{\partial N}{\partial \tau_m} = \lambda \cdot \frac{r}{r_1} \left(1 + \frac{\delta}{2r}\right) t_m(u)$$

Als Teilbetrag für den Schrumpfring erhält man daher:

68.) $$\frac{\partial A_1}{\partial \tau_m} = \left[\lambda \cdot \frac{r}{r_1} \left(1 + \frac{\delta}{2r}\right)\right]^2 \int_0^1 t_m(u) \, \Sigma \, \tau_m \, t_m(u) \cdot \frac{\lambda}{EF_1} \cdot du$$

Fügt man den Betrag für das Rohr, der sich ergibt, wenn an Stelle von $F_1$ F gesetzt wird, hinzu, so hat man insgesamt:

69.) $$\frac{\partial A_1}{\partial \tau_m} = \frac{\lambda^3}{E} \left(\frac{r}{r_1}\right)^2 \cdot \left(1 + \frac{\delta}{2r}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{F_1} + \frac{1}{F}\right) \int_0^1 t_m(u) \, \Sigma \, \tau_m \cdot t_m(u) \cdot du$$

Für das Rohr wird z.B.

71.) $$M = \frac{E \cdot \delta^3}{12 \cdot \lambda^3} \cdot \frac{r}{r_1} \cdot \frac{d^2y}{du^2}$$ 72.) $$\frac{d^2y}{du^2} = \Sigma \, \tau_m \cdot f_m''(u)$$

73.) $$M = \frac{E \cdot \delta^3}{12 \cdot \lambda^2} \cdot \frac{r}{r_1} \Sigma \, \tau_m \cdot f_m''(u)$$ 74.) $$\frac{\partial M}{\partial \tau_m} = \frac{E \cdot \delta^3}{12 \cdot \lambda^2} \cdot \frac{r}{r_1} \cdot f_m''(u)$$

ferner folgende Teilbeträge:

75.) $$\frac{\partial A_2}{\partial \tau_m} = \frac{E \, \delta^3}{12 \, \lambda^3} \cdot \frac{r}{r_1} \cdot \int f_m''(u) \cdot \Sigma \, \tau_m \cdot f_m''(u) \cdot du$$ für Zylinder

76.) $$\frac{\partial A_2}{\partial \tau_m} = \frac{E\ \delta_1^3}{12\ \lambda^3} \cdot \int f_m''(u) \cdot \Sigma\ \tau_m \cdot f_m''(u) \cdot du$$ für den Schrumpfring

77.) $$\frac{\partial A_2}{\partial \tau_m} = \frac{E\ \delta^3}{12\ \lambda_1^3} \cdot \frac{r}{r_1} \int \varphi_m''(u) \cdot \Sigma\ \tau_m \cdot \varphi_m''(u) \cdot du$$ " das freie Rohr

Zusammen hat man

78.) $$\frac{\partial A_2}{\partial \tau_m} = \left[ \frac{E\ \delta^3}{12\ \lambda^3} \cdot \frac{r}{r_1} + \frac{E\ \delta_1^3}{12\ \lambda^3} \right] \cdot \int f_m''(u) \cdot \Sigma\ \tau_m \cdot f_m''(u) \cdot du +$$

$$+ \frac{E\ \delta^3}{12\ \lambda_1^3} \cdot \frac{r}{r_1} \cdot \int \varphi_m''(u) \cdot \Sigma\ \tau_m \cdot \varphi_m''(u) \cdot du$$

Weiter ergibt sich analog:

79.) $$\frac{\partial A_3}{\partial \tau_m} = \left[ \frac{E\ F_1}{r_1^2} + \frac{E\ F}{r^2} \right] \cdot \lambda \cdot \int f_m(u) \cdot \Sigma\ \tau_m \cdot f_m(u) \cdot du +$$

$$+ \frac{E\ F}{r^2} \cdot \lambda_1 \int \varphi_m(u) \Sigma\ \tau_m \cdot \varphi_m(u) \cdot du$$

Um die Ableitungen von $A_4$ zu bestimmen, führen wir zunächst in $A_4$ nach 52, den Wert für $\tau$ nach 62) ein.

Man hat damit

80.) $$A_4 = \frac{\lambda}{2\ G} \cdot \int du \cdot \int \tau^2\ dF$$

wobei das innere Integral über den Querschnitt des Schrumpfringes bzw. des Rohres zu nehmen ist. Die bei der Zwischenrechnung auftretenden Integrale sind zum Beispiel bei dem Ring:

81.) $$\int z \cdot dF = 0$$

82.) $$\int z^2 \cdot dF = J_1 = \frac{F_1 \cdot \delta_1^2}{12}$$

83.) $$\int z^3 \cdot dF = 0$$

84.) $$\int z^4 \cdot dF = \frac{F_1 \cdot \delta_1^4}{80}$$

Die einfache Durchführung der Rechnung liefert schließlich für den Schrumpfring den Beitrag:

86.) $$\int \tau^2 \cdot dF = \frac{F_1}{3} \cdot \left[ \tau'^2 + \frac{E\ \delta_1^2}{4 \cdot \lambda^3} \cdot \tau' \cdot \frac{d^3y}{du^3} + \left(\frac{E}{2\ \lambda^3}\right)^2 \cdot \frac{\delta_1^4}{10} \cdot \left(\frac{d^3y}{du^3}\right)^2 \right]$$

und weiter:

87.) $$A_4 = \frac{F_1 \cdot \lambda}{6 \cdot G} \int_0^1 \left[ \tau'^2 + \frac{E\ \delta_1^2}{4\ \lambda^3} \cdot \tau' \cdot \frac{d^3y}{du^3} + \frac{1}{10} \cdot \left(\frac{E \cdot \delta_1^2}{2\ \lambda^3}\right)^2 \cdot \left(\frac{d^3y}{du^3}\right)^2 \right] \cdot du$$

oder auch durch Umformung in eine Summe von Quadraten:

88.) $$A_4 = \frac{F_1 \cdot \lambda}{6 \cdot G} \int_0^1 \left[ \left( \tau' + \frac{E \cdot \delta_1^2}{8\ \lambda^3} \cdot \frac{d^3y}{du^3} \right)^2 + \frac{3}{5} \cdot \left(\frac{E \cdot \delta_1^2}{8\ \lambda^3}\right)^2 \cdot \left(\frac{d^3y}{du^3}\right)^2 \right] \cdot du$$

Der Ausdruck für $\tau$ (unter Nr.62) enthält 2 Bestandteile, herrührend aus $\tau'$ zwischen Lasche und Rohr, ferner dem parabolischen Bestandteil, der in gleicher Weise bei einem gewöhnlichen, transversal belasteten Stab auftritt. Während wir diesen zweiten Bestandteil bei Formulierung des Ausdruckes für die Lasche, wegen deren verhältnismäßig beträchtlicher Dicke beibehielten, werde er beim Zylinderrohr als unbedeutend vernachlässigt, wie dies ja auch bei dem dünnen Stabe zulässig ist. Hiermit vereinfacht sich der Betrag des Rohres zu $A_4$ in

$$\frac{F \cdot \lambda}{6 \cdot G} \cdot \int_0^1 \tau'^2 \cdot du \qquad (\text{mit } F = \frac{r}{r_1} \cdot \delta)$$

Im Ganzen erhält man also:

$$89.) \quad A_4 = \frac{F_1 \cdot \lambda}{6\,G} \cdot \int_0^1 [(\tau' + \frac{E\,\delta_1^2}{8\,\lambda^3} \cdot \frac{d^3y}{du^3})^2 + \frac{F}{F_1} \cdot \tau'^2 + \frac{3}{5} \cdot (\frac{E\,\delta_1^2}{8\,\lambda^3} \cdot \frac{d^3y}{du^3})^2] \cdot du$$

In 89.) setzen wir gemäß 55.)

$$\tau' = \Sigma\, \tau_m\, h_m(u) \qquad \text{wobei} \quad h_m(u) = u^{m+1} - u^{m+3} \qquad \text{ist,}$$

sowie gemäß 44.)

$$\frac{d^3y}{du^3} = \Sigma\, \tau_m\, f'''_m(u) \quad ;$$

weiter werde zur Abkürzung

$$90.) \quad h_m(u) + \frac{E\,\delta_1^2}{8\,\lambda^3}\, f'''_m(u) = \varkappa_m(u) \qquad \text{gesetzt.}$$

Hiermit wird schließlich

$$91.) \quad A_4 = \frac{F_1 \lambda}{6\,G} \int_0^1 [\left(\Sigma\, \tau_m\, \varkappa_m(u)\right)^2 + \frac{F}{F_1} \left(\Sigma\, \tau_m\, h_m(u)\right)^2 + \frac{3}{5} \left(\frac{E\,\delta_1^2}{8\,\lambda^3} \cdot \Sigma\, \tau_m\, t'''_m(u)\right)^2] \cdot du$$

und

$$92.) \quad \frac{\partial A_4}{\partial \tau_m} = \frac{F_1 \lambda}{3\,G} \int_0^1 \varkappa_m(u)\, \Sigma\, \tau_m\, \varkappa_m(u)\, du + \frac{F \lambda}{3\,G} \int_0^1 h_m(u)\, \Sigma\, \tau_m\, h_m(u)\, du$$

$$+ \frac{F_1 \lambda}{5\,G} \left(\frac{E\,\delta_1^2}{8\,\lambda^3}\right)^2 \int_0^1 f'''_m(u)\, \Sigma\, \tau_m\, f'''_m(u)\, du$$

Nach diesen Vorbereitungen benutzen wir das Prinzip von Castigliano zur Bestimmung der Größen $\tau_0$ bis $\tau_6$ .....

Unter Berücksichtigung der statischen Bedingungen am Rande des Schrumpfringes (Nr.45 und 46) haben wir den Ausdruck

$$93.) \quad A - \vartheta_1 \cdot (\frac{E \cdot \delta_1^3}{12\,\lambda^2} \cdot \frac{d^2y}{du^2} + M_1) - \vartheta_2 \cdot (\frac{E \cdot \delta_1^3}{12\,\lambda^3} \cdot \frac{d^3y}{du^3} + Q_1) \quad \text{für} \quad u = 1$$

zu einem Kleinstwert zu machen, wobei die Lagrange'schen Multiplikatoren $\vartheta_1$ und $\vartheta_2$ noch zu bestimmende Konstanten darstellen. Das heißt, wir bilden die Gleichungen:

94.) $$\sum_{i=1}^{4} \frac{\partial A_i}{\partial \tau_m} - \vartheta_1 \cdot \frac{E \cdot \delta_1^3}{12\,\lambda^2} \cdot f''_{m(1)} - \vartheta_2 \cdot \frac{E \cdot \delta_1^3}{12\,\lambda^3} \cdot f'''_{m(1)} = 0$$

für m = 0, 2, 4, 6 . . . . .

Zusammen mit den beiden statischen Bedingungen Nr.47 und 48 verfügt man hiermit über die genügende Anzahl von Gleichungen zur Bestimmung der Unbekannten $\tau_m$, sowie $\vartheta_1$ und $\vartheta_2$.

Nachdem die sämtlichen Bestandteile für die zahlenmäßige Durchführung dieser Gleichungen Nr.94 vorbereitet sind, werden die auftretenden Integrale nach dem Simpson'schen Verfahren ermittelt. Das Intervall 0 bis 1 wird in 6 Teillängen von je 1/6 eingeteilt, womit z.B.

95.) $$\int_0^1 y \cdot du = \frac{1}{18} \cdot (y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + 2y_4 + 4y_5 + y_6] \qquad \text{wird.}$$

Nachstehend sind die Berechnungen für sämtliche, in Betracht kommenden Integrale nach diesem Schema durchgeführt.

In den 4 Gleichungen Nr.94 bringen wir die Glieder, welche $\vartheta_1$ und $\vartheta_2$ enthalten, auf die rechten Seiten, die zusammenfassend mit $L_0$, $L_2$, $L_4$ und $L_6$ bezeichnet werden sollen. Die Gleichungen sind dann in $\tau_0$ bis $\tau_6$ symmetrisch und lauten:

96.) $\alpha_{00} \cdot \tau_0 + \alpha_{02} \cdot \tau_2 + \alpha_{04} \cdot \tau_4 + \alpha_{06} \cdot \tau_6 = L_0$

97.) $\alpha_{20} \cdot \tau_0 + \alpha_{22} \cdot \tau_2 + \alpha_{24} \cdot \tau_4 + \alpha_{26} \cdot \tau_6 = L_2$

98.) $\alpha_{40} \cdot \tau_0 + \alpha_{42} \cdot \tau_2 + \alpha_{44} \cdot \tau_4 + \alpha_{46} \cdot \tau_6 = L_4$

99.) $\alpha_{60} \cdot \tau_0 + \alpha_{62} \cdot \tau_2 + \alpha_{64} \cdot \tau_4 + \alpha_{66} \cdot \tau_6 = L_6$

mit $$L_m = \vartheta_1 \cdot \frac{E \cdot \delta_1^3}{12\,\lambda^2} \cdot f''_{m(1)} + \vartheta_2 \cdot \frac{E \cdot \delta_1^3}{12\,\lambda^3} \cdot f'''_{m(1)} \quad .$$

Unter Benutzung von Nr.69, 78, 79 und 92 erkennt man leicht das allgemeine Schema:

100.) $$\alpha_{mn} = \frac{\lambda^3}{E} \left[\frac{r}{r_1}(1 + \frac{\delta}{2r})\right]^2 \left(\frac{1}{F_1} + \frac{1}{F}\right) \int t_m \cdot t_n du + \frac{E}{12\,\lambda^3} \cdot$$

$$\cdot \left(\frac{\delta^3 r}{r_1} + \delta_1^3\right) \int f''_m f''_n \, du + \frac{E\,\delta^3}{12\,\lambda_1^3} \cdot \frac{r}{r_1} \int \varphi''_m \cdot \varphi''_n \cdot du +$$

$$+ E\lambda \left(\frac{F_1}{r_1^2} + \frac{F}{r^2}\right) \cdot \int f_m f_n \, du + \frac{EF}{r^2} \lambda_1 \cdot \int \varphi_m \cdot \varphi_n \, du +$$

$$+ \frac{F_1 \lambda}{3\,G} \cdot \int \varkappa_m \varkappa_n \, du + \frac{F\lambda}{3\,G} \cdot \int h_m h_n \, du + \frac{F_1 \lambda}{5\,G} \left(\frac{E\,\delta_1^2}{8\,\lambda^3}\right)^2 \int f'''_m f'''_n \, du \quad .$$

Für die weitere Zahlenrechnung seien folgende Daten zusammengestellt:

Als Maßeinheiten dienen kg und cm.

Die Größen F und $F_1$ bedeuten cm.

Die Funktionen $t_m$ $h_m$ und $\varkappa_m$ sind dimensionslos.

$f_m$ $f''_m$ $f'''_m$ sowie $\varphi_m$ und $\varphi''_m$ bedeuten $\frac{cm^3}{kg}$

Weiter wurde gesetzt: $E = 2{,}18 \cdot 10^6$ kg/cm² und $G = \frac{E}{2{,}6}$

Die Rohrabmessungen finden sich auf S.4.

Ferner ist zu setzen

$$F_1 = \delta_1 = 8{,}2 \text{ cm} \qquad F = \delta \cdot \frac{r}{r_1} = 2{,}315 \text{ cm}$$

Die unter Nr.96 auftretenden Beiwerte für die Berechnung von $\alpha_{mn}$ sind folgende:

$$\frac{\lambda^3}{E}\left[\frac{r}{r_1}\cdot\left(1+\frac{\delta}{2r}\right)\right]^2 \left(\frac{1}{F_1}+\frac{1}{F}\right) = 6{,}0005 \cdot 10^{-4} \ \frac{cm^4}{kg}$$

$$\frac{E}{12\,\lambda^3}\left(\delta\cdot\frac{r}{r_1}+\delta_1{}^3\right) = 3{,}6656 \cdot 10^5 \cdot \frac{kg}{cm^2}$$

$$\frac{E\,\delta^3}{12\,\lambda_1{}^3}\cdot\frac{r}{r_1} = 0{,}09451 \cdot 10^5 \ "$$

$$E\cdot\lambda\cdot\left(\frac{F_1}{r_1{}^2}+\frac{F}{r^2}\right) = 0{,}65598 \cdot 10^5 \ "$$

$$E\ \lambda_1\ \frac{F}{r^2} = 0{,}17622 \cdot 10^5 \ "$$

$$\frac{F_1\lambda}{3\,G} = 0{,}2136 \cdot 10^{-4} \ \frac{cm^4}{kg}$$

$$\frac{F\lambda}{3\,G} = 0{,}0603 \cdot 10^{-4} \ "$$

$$\frac{F_1\lambda}{5\,G}\left(\frac{E\,\delta_1{}^2}{8\,\lambda^3}\right)^2 = 0{,}54498 \cdot 10^5 \ \frac{kg}{cm^2}$$

Von den 8 Bestandteilen von $\alpha_{mn}$ (Nr.96) rührt der erste von den Normallängenänderungen her, der 2. und 3. entspricht dem Einfluß der Biegungsmomente, der 4. und 5. stellt den Beitrag der Ringspannungen dar und schließlich rühren der 6., 7. und 8. Summand von den Schubspannungen her.

Die Zahlenrechnung zeigt nun, daß der 1.Bestandteil (Normal-Kraft) und der 7.(Schubspannung im Rohr)für die Ermittlung von $\alpha_{mn}$ durchaus bedeutungslos sind.

Wir unterdrücken daher den 1. und 7. Bestandteil. Zur Vereinfachung der Schreibweise werde z.B. noch die Bezeichnung

100.a) $(f_{mu}) = \int_0^1 f_m \cdot f_n \, du$ eingeführt und in analoger Weise auch für die übrigen Integralwerte. Hiermit setzen wir an abgekürzter Form:

101.) $\alpha_{mn} = 3{,}6656 \cdot 10^5 \,(f''_{mn}) + 0{,}0945 \cdot 10^5 \,(\varphi''_{mn}) + 0{,}6560 \cdot 10^5 \,(f_{mn}) +$

$+ 0{,}1762 \cdot 10^5 \,(\varphi_{mn}) + 0{,}2136 \cdot 10^{-4} \,(\varkappa_{mn}) + 0{,}5450 \cdot 10^5 \,(f'''_{mn})$

Zwecks Berechnung der Integralwerte werden die unter Nr.44 und 45 angegebenen Funktionen $f_m(u)$ und $\varphi_m(u)$ sowie deren Ableitungen im Intervall 0 bis 1 für 6 in gleichen Abständen folgende Werte von u berechnet, ebenso $\varkappa_m(u)$ gemäß Nr.90.

Hierauf folgt die Auswertung der Produkte zu zweien entsprechend 100.a), womit schließlich die Integrale nach der Simpson'schen Regel, wie unter 95 angegeben, gefunden wurden. Mit Unterdrückung der Zwischenrechnung, sind die Resultate in nachfolgender Tabelle zusammengestellt.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $10^5 \cdot (f''_{oo}) = 0{,}06154$ | $10^5 \cdot (\varphi''_{oo}) = 0{,}06586$ | $10^5 \cdot (f_{oo}) = 0{,}02168$ | $10^5 \cdot (\varphi_{oo}) = 0{,}001365$ | $10^{-4}\ (\varkappa_{oo}) = 0{,}02617$ | $10^5 \cdot (f'''_{oo}) = 0{,}007000$ |
| " $(f''_{02}) = 0{,}88486$ | " $(\varphi''_{02}) = 0{,}878101$ | " $(f_{02}) = 0{,}56535$ | " $(\varphi_{02}) = 0{,}001756$ | " $(\varkappa_{02}) = 0{,}55631$ | " $(f'''_{02}) = 0{,}13917$ |
| " $(f''_{04}) = -69{,}6011$ | " $(\varphi''_{04}) = -75{,}0904$ | " $(f_{04}) = -23{,}2192$ | " $(\varphi_{04}) = -1{,}65600$ | " $(\varkappa_{04}) = -23{,}4696$ | " $(f'''_{04}) = -5{,}86981$ |
| " $(f''_{06}) = -3917{,}933$ | " $(\varphi''_{06}) = -3904{,}190$ | " $(f_{06}) = -2446{,}221$ | " $(\varphi_{06}) = -11{,}8103$ | " $(\varkappa_{06}) = -2402{,}354$ | " $(f'''_{06}) = -600{,}261$ |
| " $(f''_{22}) = 12{,}7338$ | " $(\varphi''_{22}) = 14{,}2714$ | " $(f_{22}) = 14{,}9282$ | " $(\varphi_{22}) = 2{,}22991$ | " $(\varkappa_{22}) = 12{,}0000$ | " $(f'''_{22}) = 2{,}82938$ |
| " $(f''_{24}) = -999{,}939$ | " $(\varphi''_{24}) = -985{,}552$ | " $(f_{24}) = -604{,}254$ | " $(\varphi_{24}) = 11{,}3786$ | " $(\varkappa_{24}) = -504{,}097$ | " $(f'''_{24}) = -118{,}709$ |
| " $(f''_{26}) = -56377{,}11$ | " $(\varphi''_{26}) = -62828{,}66$ | " $(f_{26}) = -64568{,}32$ | " $(\varphi_{26}) = -9377{,}668$ | " $(\varkappa_{26}) = -51817{,}54$ | " $(f'''_{26}) = -12202{,}84$ |
| " $(f''_{44}) = 78781{,}07$ | " $(\varphi''_{44}) = 85704{,}88$ | " $(f_{44}) = 24880{,}10$ | " $(\varphi_{44}) = 2091{,}345$ | " $(\varkappa_{44}) = 21202{,}46$ | " $(f'''_{44}) = 4986{,}69$ |
| " $(f''_{46}) = 4427904{,}0$ | " $(\varphi''_{46}) = 4345728{,}1$ | " $(f_{46}) = 2614706{,}4$ | " $(\varphi_{46}) = -42447{,}3$ | " $(\varkappa_{46}) = 2176787{,}0$ | " $(f'''_{46}) = 511987{,}2$ |
| " $(f''_{66}) = 249603610$ | " $(\varphi''_{66}) = 276722730$ | " $(f_{66}) = 279278260$ | " $(\varphi_{66}) = 39452080$ | " $(\varkappa_{66}) = 223754930$ | " $(f'''_{66}) = 52629850$ |

Mit Hilfe der Tabelle können wir jetzt nach Nr.101 die Beiwerte der Gl.96 bis 99 berechnen und erhalten folgende Zahlenwerte:

$\alpha_{00} = + 0{,}01422$ $\quad \alpha_{02} = + 0{,}19625$ $\quad \alpha_{04} = - 15{,}8868$ $\quad \alpha_{06} = - 954{,}318$

$\alpha_{22} = + 3{,}46207$ $\quad \alpha_{24} = - 240{,}294$ $\quad \alpha_{26} = - 15240{,}193$

$\alpha_{44} = + 17823{,}185$ $\quad \alpha_{46} = + 1060748{,}8$ $\quad \alpha_{66} = + 67096812$

Die Auflösungen der Gleichungen lauten:

$$\tau_0 = - 0{,}1604 \cdot L_0 - 49{,}95 \cdot L_2 + 0{,}030 \cdot L_4 - 0{,}0118 \cdot L_6$$

$$\tau_2 = - 49{,}95 \cdot L_0 - 0{,}1004 \cdot L_2 - 0{,}0378 \cdot L_4 - 0{,}000134 \cdot L_6$$

$$\tau_4 = + 0{,}030 \cdot L_0 - 0{,}0378 \cdot L_2 + 0{,}0010 \cdot L_4 - 0{,}0000239 \cdot L_6$$

$$\tau_6 = - 0{,}0118 \cdot L_0 - 0{,}000134 \cdot L_2 - 0{,}0000239 \cdot L_4 + 0{,}0000002 \cdot L_6$$

Setzen wir noch für die Größen $L_m$ ihre Werte ein, so folgen die $\tau$-Werte als Funktionen von $\vartheta_1$ und $\vartheta_2$:

$$\tau_0 = + 282{,}403 \cdot \vartheta_1 + 16{,}028 \cdot \vartheta_2$$

$$\tau_2 = + 591{,}56214 \cdot \vartheta_1 - 91{,}3166 \cdot \vartheta_2$$

$$\tau_4 = + 9{,}6330 \cdot \vartheta_1 - 19{,}9079 \cdot \vartheta_2$$

$$\tau_6 = + 0{,}50101 \cdot \vartheta_1 + 0{,}34122 \cdot \vartheta_2$$

Zur Bestimmung von $\vartheta_1$ und $\vartheta_2$ führen wir diese Ausdrücke in die Gl.47 und 48 ein, die dadurch in die folgenden übergehen:

$$- M_1 = + 17939717{,}46 \cdot \vartheta_1 - 13880{,}942 \cdot \vartheta_2$$

$$- Q_1 = + 1424487{,}579 \cdot \vartheta_1 + 569218{,}914 \cdot \vartheta_2$$

$M_1$ und $Q_1$ wurden unter Nr.16 und 17 durch Schrumpfmaß und Innendruck bestimmt. Nach Einführung dieser Werte liefert die Auflösung der beiden Gleichungen:

$$10^4 \cdot \vartheta_1 = + 13{,}02266 \cdot a + 0{,}004277 \cdot p$$

$$10^4 \cdot \vartheta_2 = + 2554{,}466 \cdot a + 0{,}838951 \cdot p$$

Damit sind auch die $\tau$-Werte als Funktionen von Schrumpfmaß a und Innendruck p darstellbar geworden. Durch Einsetzen der Werte für $\vartheta_1$ und $\vartheta_2$ erhält man:

$$\tau_0 = 4{,}4621 \cdot a + 0{,}0015\ p,$$

$$\tau_2 = - 0{,}0074 \cdot p - 22{,}5561\ a,$$

$$\tau_4 = - 5{,}0729 \cdot a - 0{,}0017\ p,$$

$$\tau_6 = + 0{,}0878 \cdot a + 0{,}00003 \cdot p \quad .$$

Auf der Grundlage der bisher durchgeführten Berechnung lassen sich sämtliche Angaben über die Formänderungen und Beanspruchungen zusammenstellen. Sie ergeben sich, dem Gang unserer Entwicklung entsprechend, je aus zwei Teilbeträgen. So findet man z.B. die Biegeordinaten zu

$$y = y_I + y_{II}$$

wobei $y_I$ durch die Formeln 9 und 10 im Bereich des Schrumpfringes bzw. am freien Rohr dargestellt wird, und ebenso $y_{II}$ durch die Formeln 44 und 45.

Die Durchrechnung ergibt für die Durchbiegungsordinaten u = 0 bis u = 6/6 folgende,

durch Schrumpfmaß a und Innendruck p ausgedrückte Zahlenwerte

im Bereich des Schrumpfringes:

| u | $y_I + y_{II} = y_1$ |
|---|---|
| 0 | $- 0{,}758 \cdot a + 0{,}7937 \cdot p \cdot 10^{-4}$ |
| 1/6 | $- 0{,}756 \cdot a + 0{,}8015 \cdot p \cdot 10^{-4}$ |
| 2/6 | $- 0{,}750 \cdot a + 0{,}8206 \cdot p \cdot 10^{-4}$ |
| 3/6 | $- 0{,}739 \cdot a + 0{,}8579 \cdot p \cdot 10^{-4}$ |
| 4/6 | $- 0{,}725 \cdot a + 0{,}9022 \cdot p \cdot 10^{-4}$ |
| 5/6 | $- 0{,}705 \cdot a + 0{,}9683 \cdot p \cdot 10^{-4}$ |
| 6/6 | $- 0{,}683 \cdot a + 1{,}0390 \cdot p \cdot 10^{-4}$ |

im Bereich des freien Zylinderrohres:

| u | $y_I + y_{II} = y$ |
|---|---|
| 0 | $- 0{,}452 \cdot a + 1{,}9039 \cdot p \cdot 10^{-4}$ |
| 1/6 | $- 0{,}462 \cdot a + 1{,}7658 \cdot p \cdot 10^{-4}$ |
| 2/6 | $- 0{,}492 \cdot a + 1{,}6680 \cdot p \cdot 10^{-4}$ |
| 3/6 | $- 0{,}538 \cdot a + 1{,}5181 \cdot p \cdot 10^{-4}$ |
| 4/6 | $- 0{,}592 \cdot a + 1{,}3396 \cdot p \cdot 10^{-4}$ |
| 5/6 | $- 0{,}645 \cdot a + 1{,}1685 \cdot p \cdot 10^{-4}$ |
| 6/6 | $- 0{,}684 \cdot a + 1{,}0392 \cdot p \cdot 10^{-4}$ |

Nachdem die Durchbiegungen ermittelt sind, ist als nächste Frage die der Beanspruchungen zu klären. Man beginnt hier am zweckmäßigsten mit der Ermittlung der zwischen Zylinderrohr und Schrumpfring auftretenden Normaldrucke. Wenn die Schrumpfringe mit Schrumpfmaß aufgezogen werden, muß dieser Druck stets positiv sein, er setzt sich, wie bereits im Vorwort erwähnt, zusammen aus den Drücken $p_1$ (ermittelt aus Gl.1 auf S.1) und $p_2$ (ermittelt aus Gl.22 auf S.7).

Nachstehend ist diese Ermittlung an Hand der Ursprungsgleichungen durchgeführt.

Bestimmung von $p_1$ (aus Gl.1, S.1).

$$\frac{d^4y}{\lambda^4 \cdot du^4} + \frac{12\,(y + a)}{r_1^{\,2} \cdot \delta_1^{\,2}} = \frac{12\,(r_1 - \frac{\delta_1}{2})}{E \cdot \delta_1^{\,3} \cdot r_1} \cdot p_1$$

Dabei ist:

$$101.)\quad \frac{d^4y}{du^4} + k^4 \cdot y = - k^4 \cdot \frac{a \cdot \frac{\delta_1}{1}}{\frac{\delta_1}{r_1} + \frac{\delta}{r}} + k^4 \cdot \frac{p}{E} \cdot \frac{r - \frac{\delta}{2}}{\frac{\delta_1}{r_1} + \frac{\delta}{r}}$$

Der Wert von $\frac{d^4y}{du^4}$ aus dieser Gleichung ermittelt und in die vorige Gleichung eingesetzt, ergibt für $p_1$:

$$102.)\quad p_1 = \frac{A \cdot E \cdot r_1 \cdot \delta_1^3 \cdot \left[ -y - \frac{a \cdot \frac{\delta_1}{r_1} - \frac{p}{E} \cdot (r - \frac{\delta}{2})}{\frac{\delta}{r} + \frac{\delta_1}{r_1}} \right] + \frac{12\,(y + a) \cdot E \cdot \delta_1}{r_1}}{12 \cdot (r_1 - \frac{\delta_1}{2})}$$

$$\text{wobei } A = \frac{12 \cdot (\frac{\delta_1}{r_1} + \frac{\delta}{r})}{r_1 \cdot \delta_1^3 + r \cdot \delta^3}$$

Die y-Werte in dieser Gleichung entsprechen hier den in der Tabelle für die Durchbiegungen ermittelten Werten $y_I$.

Nach Einsetzen der entsprechenden Zahlenwerte ergibt sich:

$$103.)\quad p_1 = -2569{,}41 \cdot y + 221{,}08 \cdot a + 0{,}9164712 \cdot p$$

Ähnlich erfolgt die Ermittlung von $p_2$ aus den Gleichungen:

$$\frac{1}{\lambda^4} \cdot \frac{d^4y}{du^4} + 12 \cdot \frac{y}{r_1^2 \cdot \delta_1^2} = \frac{12}{E \cdot \delta_1^3} \cdot (1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{\delta_1}{r_1}) \cdot [p_2 - \frac{1}{2\lambda_1} \cdot \frac{d\tau}{du}]$$

$$104.)\quad \text{Hierbei ist: } \frac{d^4y}{du^4} = -k^4 y - k^4 \cdot \frac{(\delta_1 + \delta) \cdot (r + \frac{\delta}{2})}{2\,E \cdot \lambda \cdot (\frac{\delta}{r} + \frac{\delta_1}{r_1})} \cdot \frac{d\tau}{du}$$

Eingesetzt und geordnet ergibt sich für $p_2$:

$$105.)\quad p_2 = \frac{\delta_1^3 \cdot \left[ y \cdot (-A \cdot E + \frac{12\,E}{r_1^2 \cdot \delta_1^2}) - \left\{ A \cdot \frac{(\delta + \delta_1) \cdot (r + \frac{\delta}{2})}{2\lambda \cdot (\frac{\delta}{r} + \frac{\delta_1}{r_1})} - \frac{6}{\delta_1^2 \cdot \lambda} \cdot (1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{\delta_1}{r_1}) \right\} \cdot \frac{d\tau}{du} \right]}{12 \cdot (1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{\delta_1}{r_1})}$$

und nach Einsetzen der entsprechenden Zahlenwerte:

$$106.)\quad p_2 = -2569{,}4\, y - 0{,}1758 \cdot \frac{d\tau}{du}$$

Nach Addition der Teildrücke $p_1$ und $p_2$ erhält man die in der nachstehenden Tabelle angegebenen Drücke zwischen Schrumpfring und Zylinderrohr.

| u | $p_1 + p_2$ |
|---|---|
| 0 | + 2168,62 a + 0,71227 · p |
| 1/6 | + 2162,89 a + 0,71040 · p |
| 2/6 | + 2148,83 a + 0,70581 · p |
| 3/6 | + 2121,08 a + 0,69663 · p |
| 4/6 | + 2086,51 a + 0,68530 · p |
| 5/6 | + 2032,39 a + 0,66754 · p |
| 6/6 | + 1969,11 a + 0,64675 · p |

Die zwischen Schrumpfring und Zylinderrohr auftretenden Schubkräfte ergeben sich nach der Formel:

$$\tau = u \cdot (1 - u^2) \cdot (\tau_0 + \tau_2 u^2 + \tau_4 u^4 + \tau_6 \cdot u^6)$$

| u | τ |
|---|---|
| 0 | 0 |
| 1/6 | + 0,620863 a + 2,03904 p · $10^{-4}$ |
| 2/6 | + 0,687210 a + 2,2569 p · $10^{-4}$ |
| 3/6 | - 0,559742 a - 1,8383 · p · $10^{-4}$ |
| 4/6 | - 2,428622 a - 7,9761 p · $10^{-4}$ |
| 5/6 | - 3,467752 a - 11,3890 · p · $10^{-4}$ |
| 6/6 | 0 |

Die Beanspruchung des Schrumpfringes aus den Normalkräften in Richtung der Rohrachse ergibt sich, wie bereits auf S.12 angedeutet, aus dem Ausdruck für die Normalkraft N:

$$N = (1 - \frac{\delta_1}{2r_1}) \cdot \lambda \cdot \int_0^1 \tau \cdot du$$

Zahlenmäßig ergeben sich diese Kräfte als Funktion von Schrumpfmaß a und Innendruck p ausgedrückt, wie folgt:

| u | N |
|---|---|
| 0 | - 1,920 · a - 0,000630 · p |
| 1/6 | - 6,139 · a - 0,002017 · p |
| 2/6 | - 8,936 · a - 0,002935 · p |
| 3/6 | - 9,247 · a - 0,003036 · p |
| 4/6 | - 6,782 · a - 0,002227 · p |
| 5/6 | - 2,615 · a - 0,000859 · p |
| 6/6 | 0 |

Die Beanspruchung durch die Radialspannung $\sigma_r$ wurde nach der Formel ermittelt:

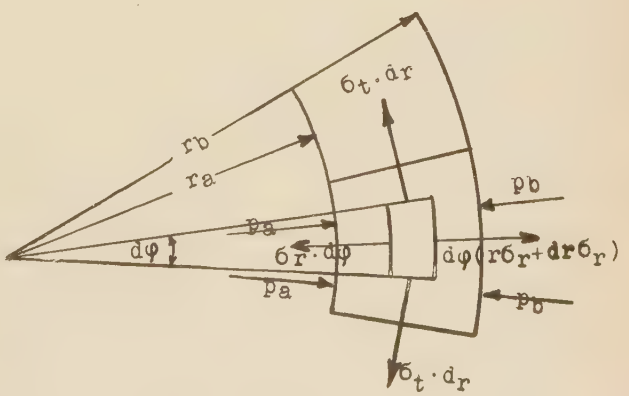
107.) $$\sigma_r = - \frac{p_a + p_b}{2} + (p_a - p_b) \cdot \frac{z}{\delta_1}$$

für Schrumpfring ist: $p_b = 0$

und

108.) $$\sigma_{r_B} = - \frac{p_a}{2} + p_a \cdot \frac{z}{\delta_1} = p_a \cdot (\frac{z}{\delta_1} - \frac{1}{2})$$

Abb.16




Die Beanspruchung $\sigma_r$ erfolgt also, radial gesehen, linear. An dem Schrumpfring erreicht $\sigma_{r_B}$ seinen Höchstwert am Innendurchmesser. Hier ist $\sigma_{r_B} = - p_a$. In der Mitte des Schrumpfringes ist $\sigma_{r_B} = - \frac{p_a}{2}$, am Außendurchmesser des Schrumpfringes wird nach vorstehender Formel $\sigma_{r_B} = 0$. Über die Breite des Schrumpfringes, in Richtung der Rohrachse betrachtet, ändert sich jedoch der Wert von $\sigma_{r_B}$. Er nimmt hier die Werte

an, die bereits vorher (S.22) bei der Bestimmung der Drücke zwischen Schrumpfring und Zylinderrohr als Summe $p_1 + p_2$ ermittelt wurden. Der Maximalwert liegt hier im Koordinatenanfangspunkt (0)

$$p_1 + p_2 = 2168{,}6174 \cdot a + 0{,}71227 \cdot p$$

und nimmt nach dem Rand des Schrumpfringes (Koordinatenpunkt 6) ab auf:

$$p_1 + p_2 = 1969{,}1093 \cdot a + 0{,}646754 \cdot p \quad .$$

Anders wirkt sich die Beanspruchung $\sigma_r$ am Zylinderrohrteil unter dem Schrumpfring aus. Hier ist in der obigen Formel für $p_a$ der Innendruck im Rohr p zu setzen und für $p_b$ die in den einzelnen Rohrquerschnitten auf S.22 ermittelten Drücke $p_1 + p_2$. $- \delta_1$ ist hier gleich $\delta$ zu setzen. Es wird dann

109.) $$\sigma_{r_k} = - \frac{p + p_1 + p_2}{2} + (p - p_1 - p_2) \cdot \frac{z}{\delta}$$

110.) $$\sigma_{r_k} = - \frac{p}{2} - \frac{p_1 + p_2}{2} + p \cdot \frac{z}{\delta} - (p_1 + p_2) \cdot \frac{z}{\delta} = p \cdot (\frac{z}{\delta} - \frac{1}{2}) - (p_1+p_2) \cdot (\frac{z}{\delta} + \frac{1}{2})$$

Man sieht sofort:

am Innendurchmesser des Rohres ist $\sigma_{r_k} = - p$,

am Außendurchmesser des Rohres ist $\sigma_{r_k} = - (p_1 + p_2)$.

Diese beiden Werte stellen die Grenzwerte der Beanspruchung $\sigma_r$ des Kernrohrteiles unter dem Schrumpfring dar und ändern ihre Größe in der Achsrichtung des Rohres mit dem Wert $p_1 + p_2$.

Es ist nur noch die Beanspruchung $\sigma_r$ im freien Rohrteil zu betrachten. Hier ist in obiger Formel für $p_a = p$ und für $p_b = 0$ einzusetzen. Wir erhalten damit:

111.) $$\sigma_{r_f} = - \frac{p}{2} + p \cdot \frac{z}{\delta} = p \cdot (\frac{z}{\delta} - \frac{1}{2}) \quad .$$

Es ist also nach vorstehender Formel am Außendurchmesser des freien Rohrteils $\sigma_{r_f} = 0$, am Innendurchmesser $= - p$. Die Änderung von $\sigma_{r_f}$ in radialer Richtung gesehen, erfolgt linear und bleibt, da ein Außendruck an diesem freien Rohrteil nicht wirksam ist, über die ganze freie Länge, in der Achsrichtung gesehen, konstant.

Bestimmung der Ringspannung $\sigma_t$.

Hier müssen wir 3 Abschnitte unterscheiden.

1.) Den Zylinderrohrteil unter dem Schrumpfring.

Die tangentiale Ringspannung wurde hier für verschiedene Punkte nach der Formel ermittelt:

112.) $$\sigma_t = \frac{r_0^2 \cdot p - r_1^2 \cdot (p_1 + p_2)}{r_1^2 - r_0^2} + \frac{r_0^2 \cdot r_1^2}{r_1^2 - r_0^2} \cdot \frac{p - p_1 - p_2}{r^2}$$

In Funktion des Schrumpfmaßes a und des Innendruckes p ausgedrückt, ergeben sich für verschiedene Querschnitte die in nachstehender Tabelle aufgeführten Ringspannungen $\sigma_t$. Hierbei beziehen sich die Zeiger in der Klammer auf den jeweiligen Querschnitt u in Richtung der Rohrachse gemessen, während sich die Zeiger hinter der Klammer auf die Innen-(i) oder Außenseite (a) des Rohres, bzw. dessen neutrale Faser (m) beziehen.

| | |
|---|---|
| $\sigma_{t(o)i}$ | - 38733,72 · a + 4,129 p |
| $\sigma_{t(o)m}$ | - 37601,14 · a + 3,989 p |
| $\sigma_{t(o)a}$ | - 36565,10 · a + 3,841 p |
| $\sigma_{t(3)i}$ | - 37884,64 a + 4,419 p |
| $\sigma_{t(3)m}$ | - 36776,88 a + 4,260 p |
| $\sigma_{t(3)a}$ | - 35763,54 a + 4,115 p |
| $\sigma_{t(6)i}$ | - 35170,26 · a + 5,309 p |
| $\sigma_{t(6)m}$ | - 34141,88 · a + 5,125 p |
| $\sigma_{t(6)a}$ | - 33201,14 · a + 4,956 p |

2.) Der freie Zylinderrohrteil zwischen den Schrumpfringen.

Hier ist $\sigma_t$ mit guter Annäherung bestimmt durch:

113.) $\sigma_t = \frac{E}{r} \cdot y_r$, wobei sich $y_R = y_I + y_{II}$ aus den Teildurchbiegungen $y_I$ und $y_{II}$ für den freien Rohrteil zusammensetzt.

| u | $\sigma_{tk}$ |
|---|---|
| 0 | - 22490,34 a + 9,476 · p |
| 1/6 | - 23010,70 a + 8,789 · p |
| 2/6 | - 24496,14 a + 8,302 p |
| 3/6 | - 26764,63 a + 7,556 p |
| 4/6 | - 29468,33 a + 6,667 p |
| 5/6 | - 32112,50 a + 5,816 p |
| 6/6 | - 34020,85 a + 5,172 p |

3.) Die Ringspannung $\sigma_t$ im Schrumpfring.

Diese wurde gleichfalls mit guter Annäherung nach der Formel ermittelt:

$\sigma_{t_B} = \frac{E}{r_1} \cdot y_B$ und ergab nachstehende Werte, am mittleren Radius gemessen:

| u | $\sigma_{t_B}$ |
|---|---|
| 0 | + 10710,36 a + 3,517 p |
| 1/6 | + 10810,51 a + 3,551 p |
| 2/6 | + 11074,58 a + 3,636 p |
| 3/6 | + 11573,32 a + 3,801 p |
| 4/6 | + 12173,62 a + 3,998 p |
| 5/6 | + 13066,26 a + 3,290 p |
| 6/6 | + 14024,44 a + 4,606 p |

Es sind jetzt noch die Biegungsspannungen in Schrumpfring und Rohr zu ermitteln, die infolge der Differenz der Durchbiegungsordinaten entstehen. Diese Beanspruchung $\sigma_b$ ist aus dem Biegungsmoment ermittelt worden. Es ist: $M_B = M_{1_B} + M_{2_B}$

114.) $$M_B = \frac{1}{\lambda^2} \cdot E \cdot J \cdot \left(\frac{d^2y_I}{du^2} + \frac{d^2y_{II}}{du^2}\right)$$

Hierbei ist:

$$\frac{d^2y_I}{du^2} = 2k^2 \cdot (-C_1 \cdot \text{Sin } ku \cdot \sin ku + C_4 \cdot \text{Kos } ku \cdot \cos ku)$$

$$\frac{d^2y_{II}}{du^2} = \tau_o f_o'' + \tau_2 f_2'' + \tau_4 \cdot f_4'' + \tau_6 \cdot f_6''$$

bei Berechnung für den Schrumpfring einzusetzen, und die Biegebeanspruchung nach der Formel

$$\sigma_b = \frac{M_{1_B} + M_{2_B}}{W}$$

zu bestimmen.

Diese Werte für den Schrumpfring errechnet, sind in der folgenden Tabelle aufgeführt:

| u | $\sigma_{b_B}$ |
|---|---|
| 0 | + 31564,20 a + 10,576 · p |
| 1/6 | + 31516,38 a + 10,350 · p |
| 2/6 | + 30764,49 a + 10,104 p |
| 3/6 | + 30707,26 a + 10,096 p |
| 4/6 | + 26612,35 a + 8,740 p |
| 5/6 | + 14966,48 a + 4,966 p |
| 6/6 | 0 |

Analog sind die Biegungsspannungen im Zylinderrohrbereich errechnet. Hier ist:

$$\frac{d^2y_I}{du^2} = 2 \cdot k_1^2 \cdot (-D_1 \cdot \text{Sin } k_1u \cdot \sin k_1u + D_4 \cdot \text{Kos } k_1u \cdot \cos k_1u)$$

$$\frac{d^2y_{II}}{du^2} = \tau_o \cdot \varphi_o'' + \tau_2 \varphi_2'' + \tau_4 \varphi_4'' + \tau_6 \cdot \varphi_6''$$

für den freien Rohrbereich zu setzen. Auch hier ist die resultierende Biegungsspannung $\sigma_b = \frac{M_{1_R} + M_{2_R}}{W}$, wobei für W das Widerstandsmoment für den freien Rohrquerschnitt einzusetzen ist.- Diese Biegungsspannung $\sigma_b$ im Diagramm mit $\sigma_{bfK}$ bezeichnet, ist mit nachstehenden Werten ermittelt worden.

| u | $\sigma_{bfK}$ |
|---|---|
| 0 | 11717,14 a + 3,848 p |
| 1/6 | 11482,36 a + 3,771 p |
| 2/6 | 11192,44 a + 3,473 p |
| 3/6 | 9258,94 a + 3,041 p |
| 4/6 | 7231,13 a + 2,375 p |
| 5/6 | 4193,51 a + 1,377 p |
| 6/6 | 0 |

Die im Zylinderrohr unter dem Schrumpfring auftretenden Biegungsspannungen, im Spannungsdiagramm mit $\sigma_{bK}$ bezeichnet, ergeben sich rechnerisch zu:

| u | $\sigma_{bK}$ |
|---|---|
| 0 | 10005,16 a + 3,352 p |
| 1/6 | 9990,05 a + 3,281 p |
| 2/6 | 9751,69 a + 3,203 p |
| 3/6 | 8959,40 a + 3,145 p |
| 4/6 | 8435,56 a + 2,770 p |
| 5/6 | 4744,06 a + 1,574 p |
| 6/6 | 0 |

Bei Betrachtung der ermittelten Spannungswerte sieht man sofort, daß die größten Spannungen die Ringspannung $\sigma_t$ und die Biegungsspannung $\sigma_b$ sind. Die Normalspannungen N und die Schubspannungen $\tau$ bleiben in geringen Grenzen, auch die Auswirkungen der Radialspannungen $\sigma_r$ können die infolge der Spannungen $\sigma_t$ und $\sigma_b$ auftretenden Deformationen niemals erreichen. Man sieht ferner, daß die von den Schubkräften zwischen Kernrohr und Schrumpfring herrührenden Momente das Maximum der am Schrumpfring auftretenden Biegungsmomente und damit die maximale Biegungsspannung $\sigma_{b_B}$ erheblich vermindern (21,59 %), während sie das Spannungsmaximum von $\sigma_{b_k}$ im freien Kernrohr unwesentlich vergrößern (3,272 %).

Die Biegungsspannung $\sigma_b$ erreicht sowohl beim freien Kernrohr als auch beim Schrumpfring ihr Maximum in der Mitte (Querschnitt 0), da ja dort bei Deformationen die kleinsten Krümmungsradien auftreten.

Die Ringspannungen $\sigma_t$ erreichen beim Schrumpfring ihr Maximum stets an der inneren Ringfläche.

Während bei Betrachtung der Biegungsspannung $\sigma_b$ das Verhältnis von Schrumpfmaß a und Innendruck p in allen Querschnitten von Kernrohr und Schrumpfring dasselbe ist, verschiebt sich dieses Verhältnis bei Betrachtung der Ringspannung $\sigma_t$ ganz erheblich. So macht sich z.B. beim freien Kernrohr der Einfluß des Innendruckes gegenüber dem Schrumpfmaß in der Mitte (Querschnitt 0) bedeutend stärker bemerkbar, als am Rand (Querschnitt 6).

Beim Kernrohrabschnitt unter dem Schrumpfring dagegen ist der Einfluß des Innendruckes gegenüber dem des Schrumpfmaßes am Rande stärker (Querschnitt 6), als in der Mitte (Querschnitt 0). Die Schaubilder Abb.20 zeigen diese Einflüsse deutlich.

Es wäre jetzt noch ein Wort über den Einfluß des Schrumpfmaßes a zu sagen. Bedenkt man, daß praktisch die Oberfläche vom Kernrohr unbearbeitet und nicht absolut kreiszylindrisch ist, wie es bei der theoretischen Untersuchung vorausgesetzt werden mußte, so wird man zu dem Schluß kommen, daß eine gewisse Abminderung der nicht unerheblichen Spannungswerte in der Praxis tatsächlich zu erwarten ist. In gewissen Grenzen wird die beiderseitige Abweichung von der genauen Kreisform von Kernrohr und Schrumpfring zunächst durch den Druck ausgeglichen werden, was sicher bei geringerer Spannungserzeugung vor sich gehen wird. Nicht möglich ist es, mit den Schrumpfringen Unebenheiten in der Zylinderwand durch Flachdrücken zu beseitigen. Die Einflüsse, die durch die oben gekennzeichneten Abweichungen von der genauen Zylinderform entstehen, sind durch besondere Untersuchungen zu klären

Abb. 17

Die resultierende Durchbiegung $y_I + y_{II}$ in Funktion des Schrumpfmaßes a und des Innendruckes p.

Maßstäbe: $\begin{cases} 1\ cm = 0{,}0001 \cdot p \\ 1\ cm = 0{,}1 \cdot a \end{cases}$

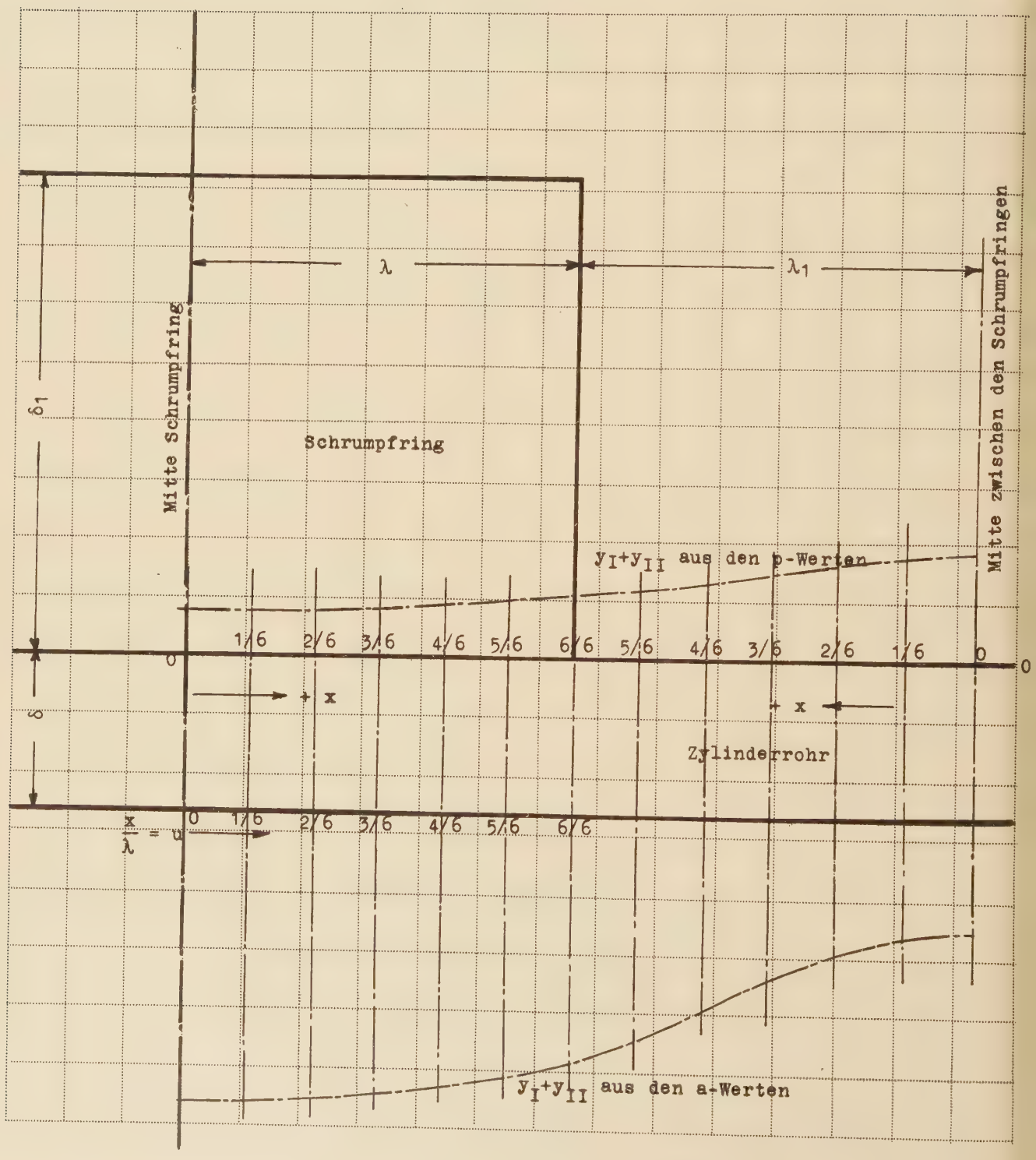
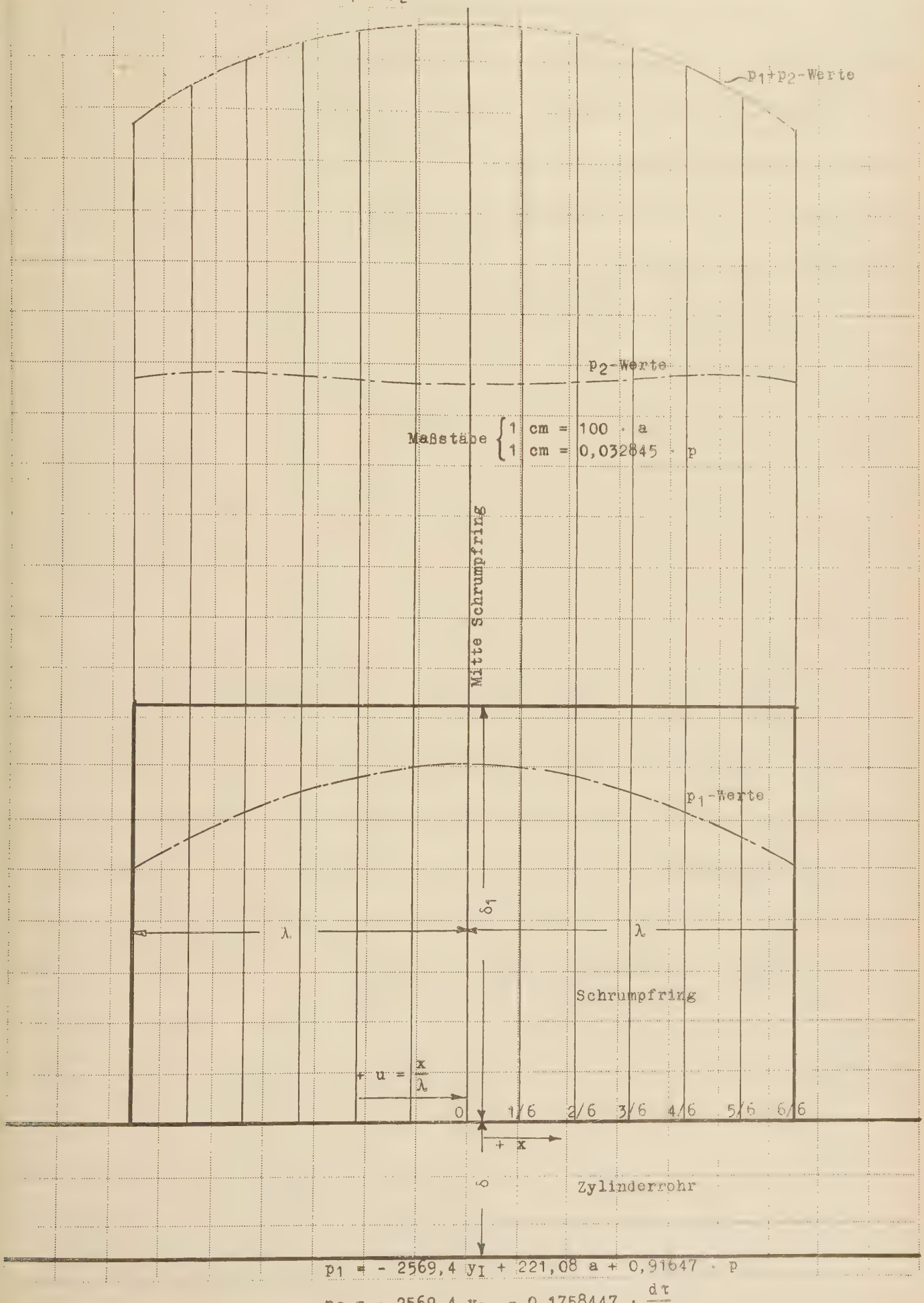


Abb. 18

Verlauf der Drücke zwischen Schrumpfring und Zylinderrohr

$(p_1 + p_2)$

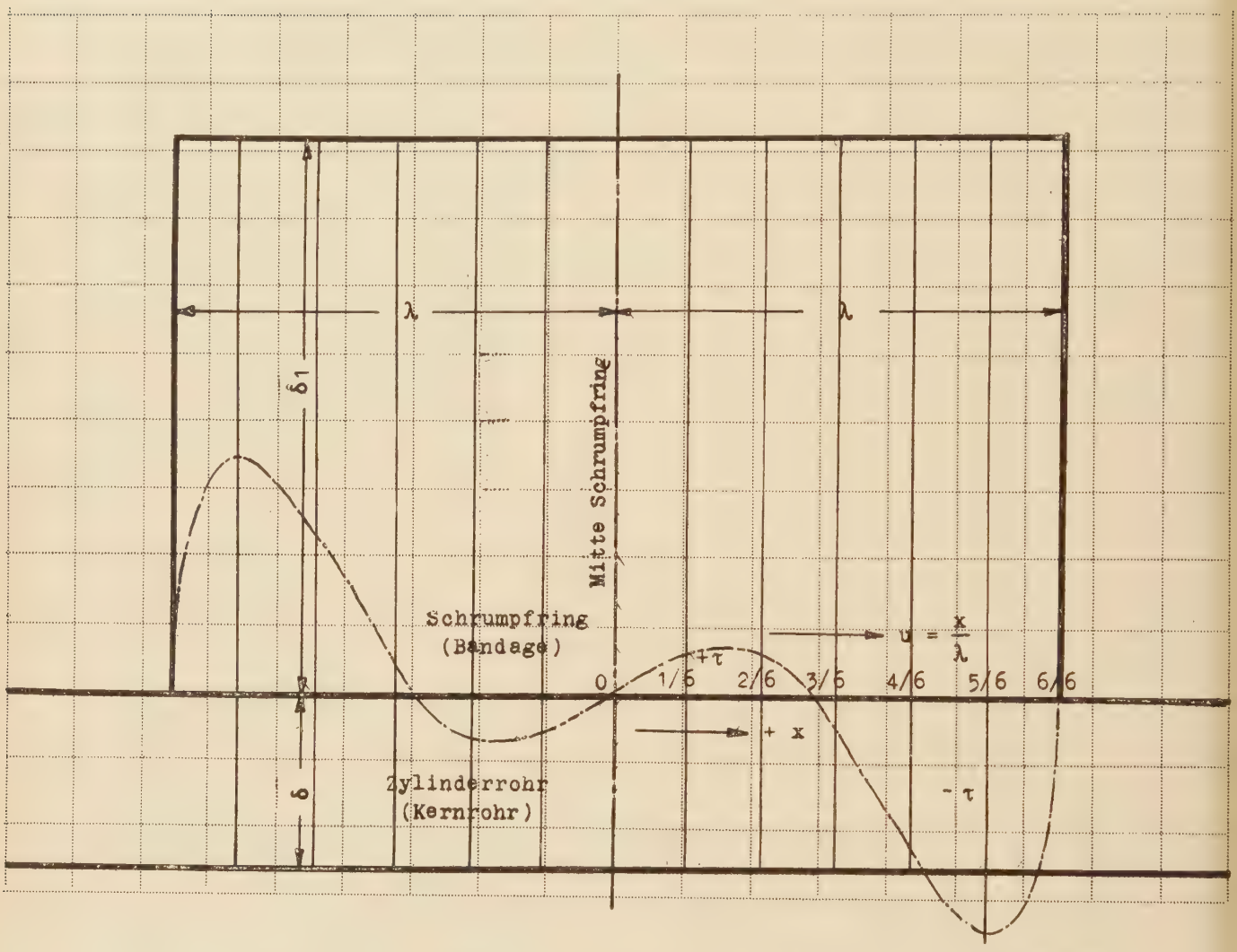



$$p_1 = -2569{,}4\, y_I + 221{,}08\, a + 0{,}91647 \cdot p$$

$$p_2 = -2569{,}4\, y_{II} - 0{,}1758447 \cdot \frac{d\tau}{du}$$

Abb.19

Verlauf der Schubkräfte τ zwischen Schrumpfring und Kernrohr an Bandageninnenfläche.




$$\tau = u \cdot (1 - u^2) \cdot (\tau_0 + \tau_2 \cdot u^2 + \tau_4 \, u^4 + \tau_6 \, u^6)$$

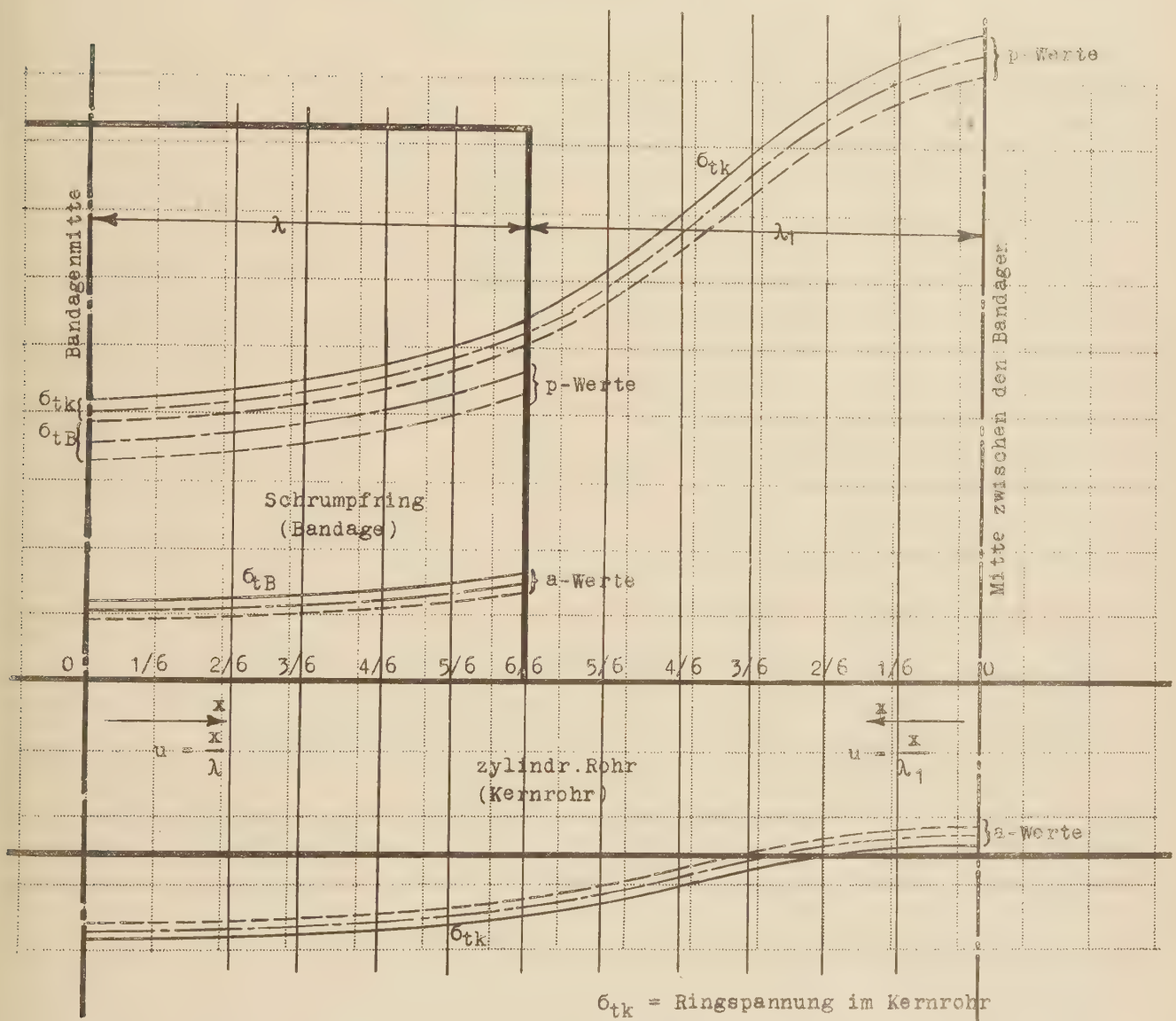
τ-Werte

Maßstäbe { 1 cm = 1,0 · a
1 cm = 0,0003284 p

Abb. 20

Die Ringspannung $\sigma_t$ in Zylinderrohr (Kernrohr) und Schrumpfring (Bandage).

Maßstäbe für $\sigma_t$ { 1 cm = 10 000 a
1 cm = 1,0 · p




$\sigma_{tk}$ = Ringspannung im Kernrohr

$\sigma_{tB}$ = Ringspannung im Schrumpfring

——————— Spannung in der inneren Faser

— — — — — — " " " äußeren "

——·——·—— " " " neutralen "

Abb.21

Die Biegungsmomente und Biegungsspannungen im Schrumpfring (Bandage).

Maßstäbe für $M_b$ { 1 cm = 50 000 · a
1 cm = 16,4628 · p

Maßstäbe für $\sigma_b$ { 1 cm = 4461,627 a
1 cm = 1,494946 p

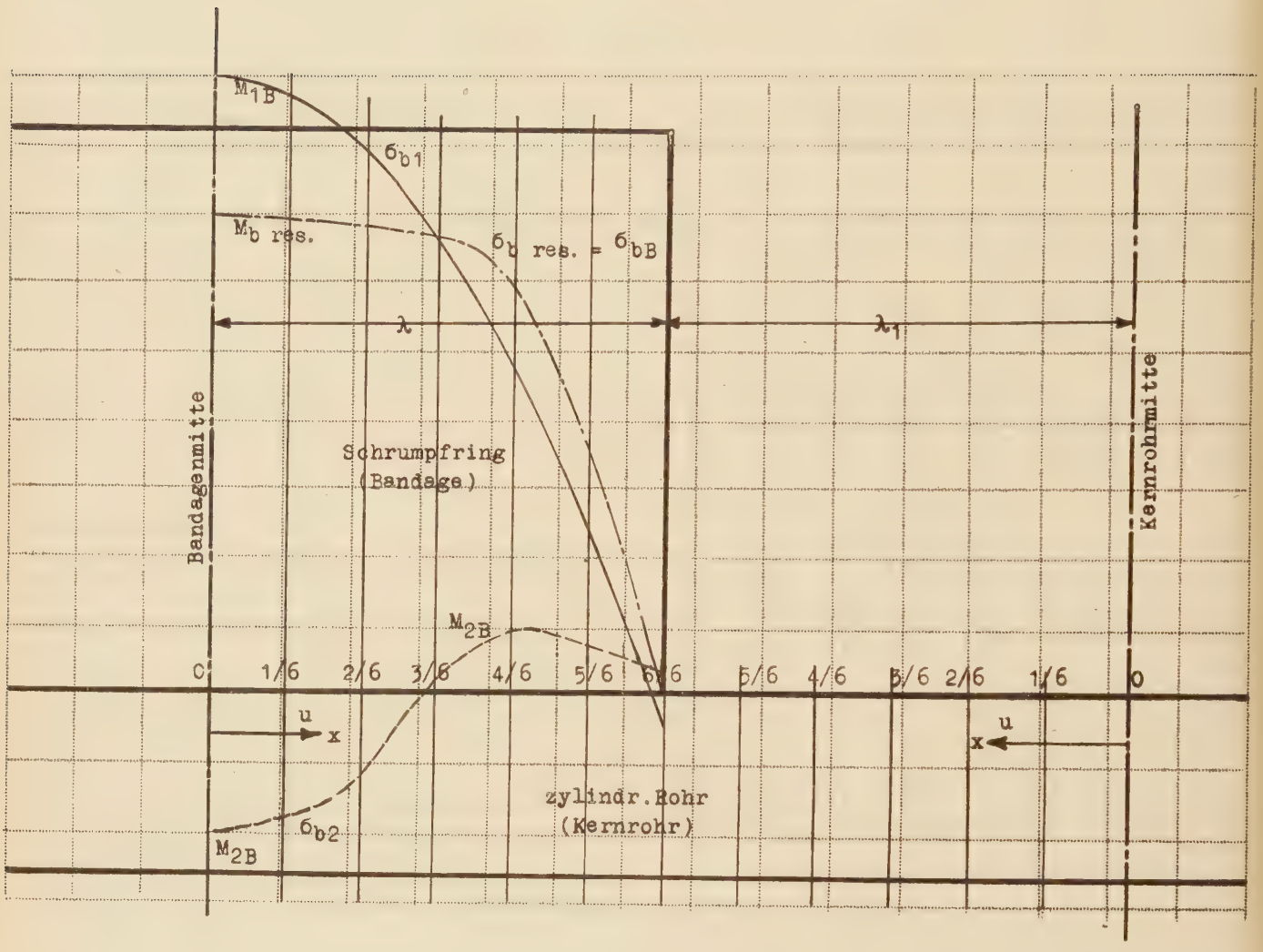
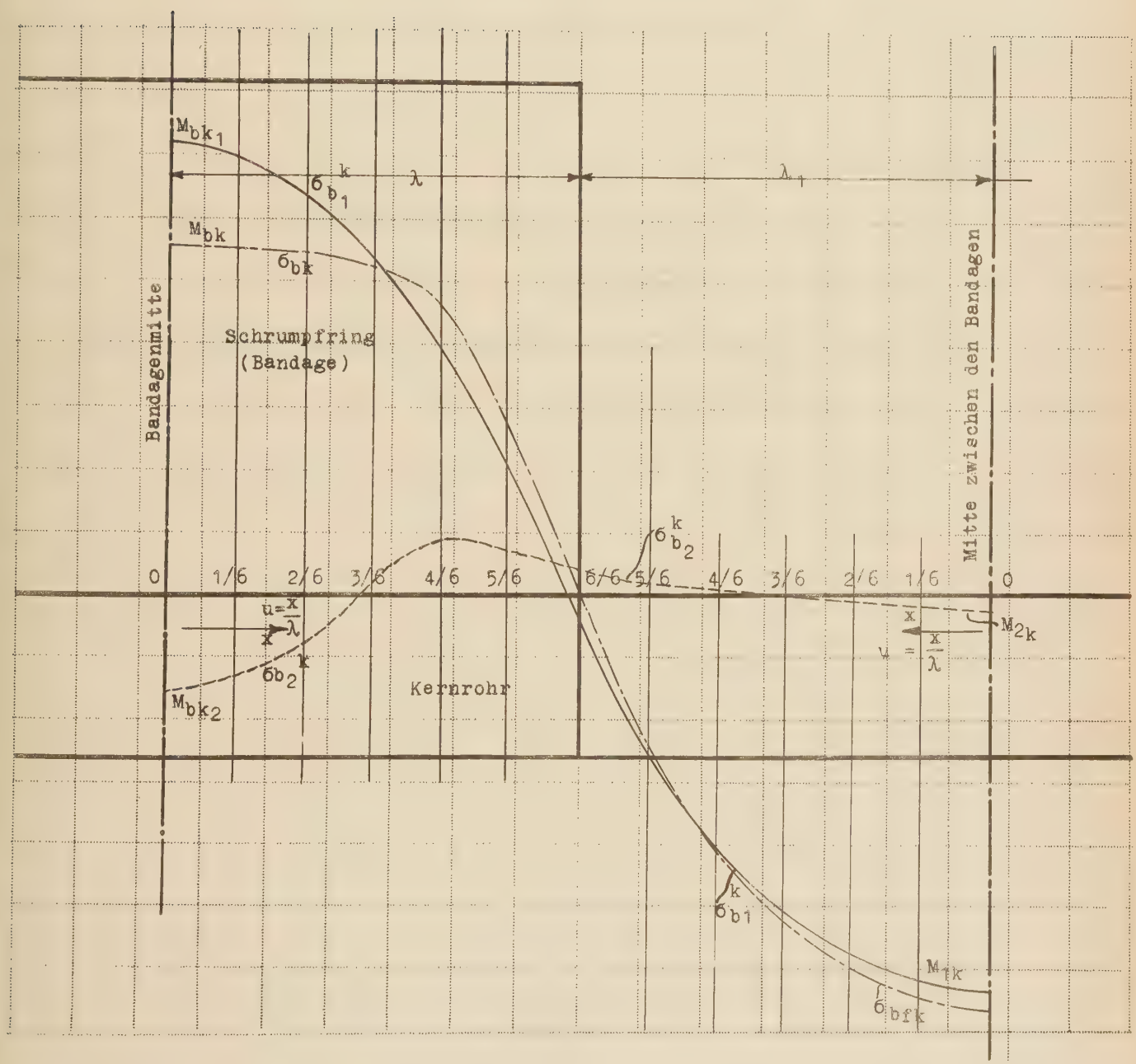


Abb.22

Die Biegungsmomente und Biegungsspannungen im Zylinde[illegible]

Maßstäbe für $M_b$ { 1 cm = 2000 a
1 cm = 0,656828 p

Maßstäbe für $\sigma_b$ { 1 cm = 1774,637 a
1 cm = 0,5228062 p



## Literatur-Angaben:


A. und L. Föppl: Drang und Zwang.

Föppl: Vorlesungen über Technische Mechanik.

Pöschl-Terzaghi: Berechnung von Behältern nach neueren analytischen und graphischen Methoden.

Hütte, Band I - IV.

Müller-Breslau: Statik II, 1.

Hruschka: Druckrohrleitungen der Wasserkraftwerke.

Geckeler: Über die Festigkeit achsensymmetrischer Schalen.

Meißner: Das Elastizitätsproblem für dünne Schalen von Ringflächen, Kugel- und Kegelform.

Höhn: Über die Festigkeit der gewölbten Böden und der Zylinderschale.

Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik.


* * * * *

# L e b e n s l a u f .

Geboren am 30. März 1891 in Troppau.

1897 bis 1902: Besuch der Volksschule ebenda.

1902 bis 1909: Besuch der Staats-Oberrealschule in Troppau.

Juli 1909: Reifeprüfung daselbst abgelegt.

1909 bis 1914: Studium des Maschinenbaues an der Technischen Hochschule Berlin.

Herbst 1911 bis 1912: Ein Jahr praktisch gearbeitet in den Witkowitzer Eisenwerken, der Ersten Brünner Maschinenfabriks-A.-G., bei Brand und Lhullier und den Brankaer Eisenwerken.

2. August 1914: Diplomhauptprüfung an der Technischen Hochschule Berlin abgelegt.

1914 bis 1918: Kriegsteilnehmer im österreichen Heer (K.K. Schützen-Rgt.15 und K.u.K. Fliegertruppe).

Bis September 1919: Bei der Fliegertruppe freiwillig weitergedient.

Hierauf Betriebsingenieur bei der Maschinenfabrik Oesmev in Wagstadt, tätig bis Ende Oktober 1920.

1. November 1920 bis September 1936 Assistent am Lehrstuhl für Wasserkraftmaschinen, Maschinenelemente, Textilmaschinen und Arbeitsmaschinen an der Technischen Hochschule Breslau.

1.X.1936 - 1.IV.1937: Konstruktions-Ingenieur bei der DEMAG, Duisburg.

Ab 1.IV.1937: am Institut für bildsame Formgebung, Walzwerks- und Hüttenmaschinenkunde der Technischen Hochschule Aachen tätig.

* * * * *

Vervielfältigung:
Vervielfältigungsanstalt E. Hunold
Braunschweig, Stobenstraße 25 / Ruf 6820